合成抵抗の公式の証明 ①「直列接続」編

Ⅰ．2つの抵抗 R_1 、R_2 を電池 V に直列接続した場合

結論:　直列接続の合成抵抗の公式　$R=R_1+R_2+\cdots+R_n$

方法:　数学的帰納法により証明する。

最初は、2つの抵抗の場合について証明する

各抵抗の電圧を V_1 、V_2 とすると、オームの法則より $V_1=IR_1$ ・・・①、$V_2=IR_2$ ・・・② が成立する。また、$V=V_1+V_2$ ・・・③ が成立する。同様に、合成抵抗値を R とすると、$V=IR$ ・・・④ になる。これらより V，V_1, V_2 を消去して $IR=IR_1+IR_2$ が得られる。よって、$R=R_1+R_2$ ・・・⑤ が成立するので、結論の公式（$n=2$）が導かれたことになる。

次に、k個の抵抗の場合について仮定する

次に、k 個の抵抗の場合について $R=R_1+R_2+\cdots+R_k$ が成立すると仮定する。

続いて、k＋1個の抵抗の場合について考える

続いて、$k+1$ 個の抵抗の場合についての合成抵抗値を考える。

k 個の抵抗 R_1 、R_2 、・・・、R_k の部分を合成して $R'=R_1+R_2+\cdots+R_k$ となる。全体は k 個の抵抗に R_{k+1} が直列に接続されたものに相当するので、2つの抵抗の直列接続の合成抵抗の公式⑤を適用して、合成抵抗値は $R=R'+R_{k+1}$ になる。

よって、$k+1$ 個の直列接続の合成抵抗値は $R=R_1+R_2+\cdots+R_{k+1}$ となる。これより、$k+1$ 個の抵抗の場合についても合成抵抗の公式が成立していることになる。

最後に、数学的帰納法により、一般化する。

以上より、$n=2$ 以上のすべての自然数において、$R=R_1+R_2+\cdots+R_n$ が成立するといえる。

合成抵抗の公式の証明 ②「並列接続」編

Ⅱ．2つの抵抗 R_1 、 R_2 を電池 V に並列接続した場合

結論:　並列接続の合成抵抗の公式 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_n}$

方法:　数学的帰納法により証明する。

最初は、2つの抵抗の場合について証明する

各抵抗の電流を I_1 、 I_2 とすると、オームの法則より $V=I_1R_1$ ･･･①、 $V=I_2R_2$ ･･･②、 $I=I_1+I_2$ ･･･③ が成立する。同様に、合成抵抗値を R とすると、 $V=IR$ ･･･④ になる。これらより I, I_1, I_2 を消去して $\dfrac{V}{R}=\dfrac{V}{R_1}+\dfrac{V}{R_2}$ が得られる。よって、 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$ ･･･⑤ が成立するので、結論の公式（ $n=2$ ）が導かれたことになる。

次に、K個の抵抗の場合について仮定する

次に、 k 個の抵抗の場合について $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_k}$ が成立すると仮定する。

続いて、K＋1個の抵抗の場合について考える

続いて、 $k+1$ 個の抵抗の場合についての合成抵抗値を考える。

k 個の抵抗 R_1 、 R_2 、･･･、 R_k の部分を合成して $\dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_k}$ となる。全体は k 個の抵抗に R_{k+1} が並列に接続されたものに相当するので、2つの抵抗の並列接続の合成抵抗の公式⑤を適用して、合成抵抗値は $\dfrac{V}{R}=\dfrac{V}{R'}+\dfrac{V}{R_{k+1}}$ になる。

よって、 $k+1$ 個の並列接続の合成抵抗値は $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_{k+1}}$ となる。これより、 $k+1$ 個の抵抗の場合についても合成抵抗の公式が成立していることになる。

最後に、数学的帰納法により、一般化する。

以上より、 $n=2$ 以上のすべての自然数において、 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_n}$ が成立するといえる。