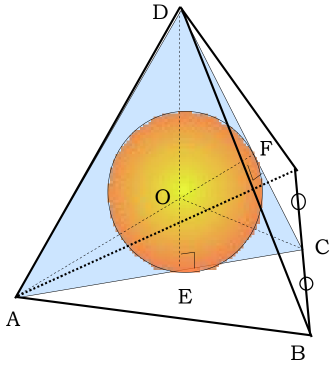
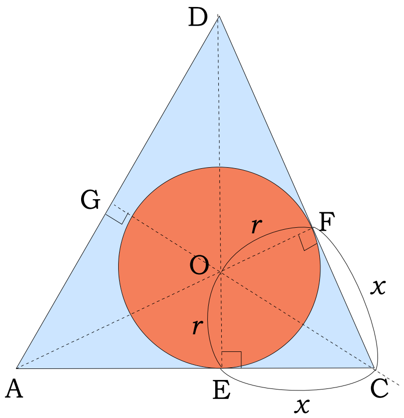
挑戦問題　第19回　「箱の中の最大球」解説



[問題] 一辺が 10 cm の正四面体に入る最大球の半径はいくらなのでしょうか？

[解法] 右図に示すように、正四面体を青色の面で切断します。この切断面は正四面体の対称面となっているので、切断面には最大球の中心点Oが含まれる。また、点E、Fは最大球の接点になる。

また、AD = 10 cm であり、AC = DC = $5\sqrt{3}$ cm になる。
また、AC = DC の二等辺三角形であるこの切断面を元に、最大球の半径を求めることにしましょう。



この切断面を左図に示すようになります。

点E、Fは最大球の接点だから、∠OCE = ∠OCF になり、OCの延長Gは二等辺三角形の底辺を2等分する。

△AGCと△OECは、∠Cが共通の直角三角形であるので、相似形になる。よって、対応する辺の比が等しいので $\dfrac{5}{5\sqrt{3}}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$ ・・・① が成立する。

同様に、△AFCと△AEOも相似形である。よって、対応する辺の比が等しいので $\dfrac{x}{5\sqrt{3}}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+(5\sqrt{3}-x)^2}}$ ・・・② が成立する。

この2つの関係式①、②を連立方程式として解けば最大球の半径 r が求められる。

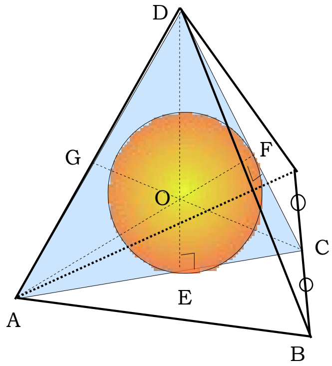
まず、①より、両辺を2乗して $r^2+x^2=3r^2$ より、 $x=\sqrt{2}\,r$ である。これを②に代入して x を消去すると、 $2\left\{r^2+(5\sqrt{3}-\sqrt{2}\,r)^2\right\}=75$ より、これを整理すると $6r^2-20\sqrt{6}\,r+75=0$ ・・・③ の2次方程式が得られる。

2次方程式の解の公式から $r=\dfrac{10\sqrt{6}\pm\sqrt{(10\sqrt{6})^2-6\times75}}{6}$ だから、 $r=\dfrac{10\sqrt{6}\pm5\sqrt{6}}{6}$ である。

ここで、 $\dfrac{10\sqrt{6}+5\sqrt{6}}{6}=6.12\ldots$ の解は、この切断面の三角形には明らかに入らないので、不適解になることが分かる。

よって、もうひとつの解 $\dfrac{10\sqrt{6}-5\sqrt{6}}{6}$ が最大球の半径であるので、最大球の半径は 2.04 cm になる。

※ この解法は「力ずくで求めた」という感じがします。「エレガントな解」とはいえないですね！



［別解 その１］ **最大球の中心は正四面体の中心と一致する。この点をO点とする。O点を頂点とし、正四面体の各面を底面とする「4つの三角錐（すべて同形）」の高さは最大球の半径 r になる。**

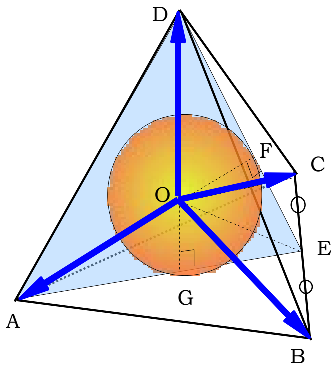
4つの三角錐の体積の和は正四面体の体積に一致する。正四面体の高さ(DE)を h 、最大球の半径を r 、正四面体の各面の面積 Sとすると、 $\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}Sr\times4$ より、 $r=\frac{1}{4}h$ ・・・① である。

また、△ACD において、AC = DC = $5\sqrt{3}$ だから2等辺三角形より、AG = DG だ。ピタゴラスの定理（△ACG に適用）より、CG = $\sqrt{AC^2-AG^2}=5\sqrt{2}$ である。

△ACD の面積を考えると $10\times5\sqrt{2}\div2=5\sqrt{3}\times DE\div2$ より、DE(h) = $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ ・・・② である。

よって、①、② より、最大球の半径 r は $r=\frac{1}{4}h=\frac{5\sqrt{6}}{6}=2.041\ldots$ cm である。

※ この解法は「スマートな感じ」がします。特に、正四面体の高さを求めるアイデアが良い！



［別解 その２］ 最大球の中心（正四面体の中心）O 点を原点とする位置ベクトルを使って考える。

ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 、 $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とする。なお、ベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の和は「ベクトルの対称性からゼロになる」ので、 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$ ・・・① が成立する[1]。

直線 AO と△BCD との交点（最大球の接点）を F とする。ベクトル $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の AO 方向の成分は全て $\overrightarrow{OF}$ だから、ベクトル $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の和の AO 方向の成分は $3\cdot\overrightarrow{OF}$ である。

①より $\vec{a}+3\cdot\overrightarrow{OF}=0$ であるから、 $OA=3\cdot OF$ より、 $OF=\frac{1}{4}AF$ ・・・② が成立する。

また、F は△BCD の垂心（重心）になるから $EF=\frac{1}{3}DE$ ・・・③ が成立する。

ピタゴラスの定理を△AEF に適用して $AF^2=AE^2-EF^2$ だから、③を用いて AF を求めると、

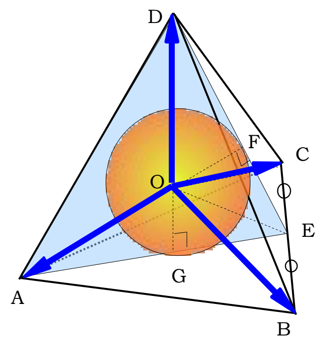
$AF=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3}\div3)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}(5\sqrt{3})^2}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ である。

よって、②を用いて OF を求めると $OF=\frac{10\sqrt{6}}{3}\div4=\frac{5\sqrt{6}}{6}=2.041\ldots$ である。よって、正四面体に入る最大球の半径は 2.04 cm である。

※「ベクトルを用いて辺の比を決める」ところは面白い。幾何学とベクトルの親和性がこの解法の中心。

1 背理法で証明できる。もし、ベクトル和がゼロでない（特定の方向成分が残る）とすると、正四面体の対称性から矛盾が起こる。

［別解　その３］ 最大球の中心（正四面体の中心）O 点を原点とする位置ベクトルを使って考える。



ベクトル　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 、 $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とし、それぞれの位置ベクトルの長さは　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=x$ とする。

なお、「ベクトル　$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の和はベクトルの対称性からゼロになる」ので、 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$ ・・・① が成立する。

また、

$$AB^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2x^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=10^2 \quad \cdots②$$

$$AC^2=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{c}=2x^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}=10^2 \quad \cdots③$$

$$AD^2=(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})=\vec{d}\cdot\vec{d}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{d}=2x^2-2\vec{a}\cdot\vec{d}=10^2 \quad \cdots④$$

も成立する。

②、③、④を辺々足算し　$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{d}=x^2$　より　$6x^2-2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=300$　である。

①を代入して　$6x^2+2\vec{a}\cdot\vec{a}=8x^2=300$　だから　$x=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$　より、 $OA=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ ・・・⑤ である。

直線 AO と△BCD との交点（最大球の接点）を F とする。OF は△BCD に垂直[2] だから、ベクトル　$\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の AO 方向の成分は全て　$\overrightarrow{OF}$　である。よって、ベクトル　$\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ の和の AO 方向の成分は　$3\cdot\overrightarrow{OF}$　になる。

よって、①より　$\vec{a}+3\cdot\overrightarrow{OF}=0$　だから、 $OA=3\cdot OF$ ・・・⑥ である。

最大球の半径は OF より　$OF=\dfrac{1}{3}OA=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}=2.041\ldots$　だから、最大球の半径は 2.04 cm である。

※ より「ベクトルらしい」解法でしょう。管理人（志）はこの解法が一番好きですね。

2　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　より、OA と BC は垂直。同様に OA と CD も垂直よって、OA（OF）と△BCD は垂直である。