

2004年 センター試験 第2問 (力学) 問題

※センター試験では、答えが選択肢になっているが、ここでは記述形式とするため問題の一部を改変している。

A 図1のように、長さ l の一様な棒ABの端Aに糸を結び、この糸の他端を鉛直に立てた杭CD上の点Pにつなぎ、棒を杭の上に置いたところ、棒は水平になり静止した。このとき棒が杭と接する点Cは点Aから距離

$\frac{l}{4}$ にあり、糸が杭となす角度は θ であった。

問1 点Cで杭が棒に及ぼす力の方向を求めなさい。

問2 棒ABの質量を M とするとき、糸の張力 T はいくらか。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

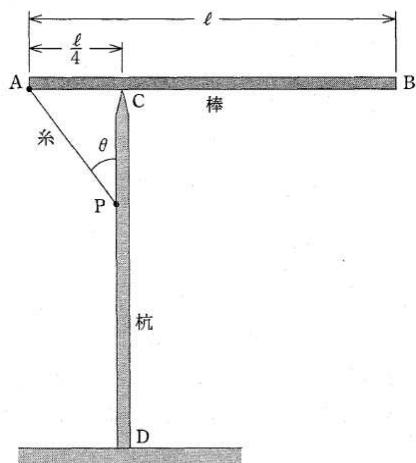


図 1

B 図2のように、質量 M の台が水平な床の上に置かれている。この台の上面では、摩擦がない曲面と摩擦がある水平面が点Qで滑らかにつながっている。台の水平面から高さ h にある面上の点Pに質量 m の小物体を置き、静かに放す。ただし、空気による抵抗はなく、重力加速度の大きさを g とする。

問3 台が床に固定されているとき、小物体は点Qまで滑り落ちたのち、点Qから距離 l だけ離れた点Rで止まった。QR間の水平面と小物体の間の動摩擦係数 μ' はいくらか。

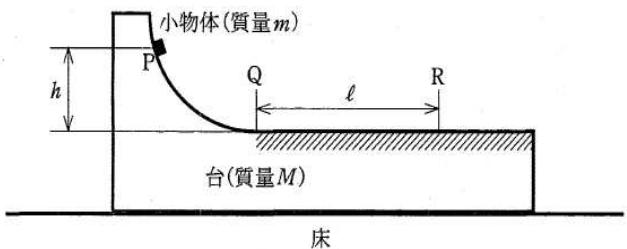


図 2

問4 次に、台が床の上で摩擦なく自由に動くことができるようになった。台が静止した状態で、点Pから同じ小物体を静かに放した。小物体が台上の点Qに達したときの、小物体の床に対する速度を v 、台の床に対する速度を V とする。ただし、速度は右向きを正とする。このとき、 v と V が満たすべき関係式を2つ作りなさい。

問5 問4と同様に台が床の上で摩擦なく自由に動く場合、小物体は、点Qを通り過ぎたのち、点Qからある距離だけ離れた位置で台に対して停止した。この時点における台の床に対する運動はどうなるか。説明しなさい。

2004年 センター試験 第2問 (力学) 解答・解説

※ センター試験では、答えが選択肢になっているが、ここでは記述形式とし、問題の一部を作り変えている。

A 力、モーメントのつりあいから考えればよい。

問1 棒の質量を M 、糸の張力 T 、棒が点Cから受ける力 (f_x, f_y) (ただし、 x は右向きを正、 y は上向きを正)とする。「棒にかかる力はつりあい」から、水平方向: $T \sin \theta + f_x = 0 \cdots$
 ①、鉛直方向: $f_y - Mg = 0 \cdots$ ② が成立する。①、②より、 $(f_x, f_y) = (-T \sin \theta, Mg)$ になるから、杭から受ける力(抗力)は「斜め左上向き」である。

問2 問1での関係式で T 、 (f_x, f_y) の3つが未知数だ。①、②だけでは解けない! よって「モーメントのつりあい」からもう一つ関係式を作ればよい。では、どこを中心とするのが良いか?
 「未知数が少なくなるC点とするのが一番良い → 杭から力のモーメントがゼロになる」

$$T \times \frac{l}{4} \cos \theta = Mg \times \frac{l}{4} \cdots \text{③} \text{ の関係式が成立するから、 } T = \frac{Mg}{\cos \theta} \text{ である。}$$

B 力学的エネルギーと摩擦力、運動量保存の法則を使いこなせば簡単に解ける。

問3 「力学的エネルギーが摩擦による仕事で失われる」ことに気付けば簡単だ。

$$mgh = \mu' mg \times l \text{ が成立するから、 } \mu' = \frac{h}{l} \text{ である。}$$

問4 小物体が台上の点Qに達したときの、小物体の床に対する速度を v 、台の床に対する速度を V とする。「外力がないので運動量が保存する」から、 $0 + 0 = mv + MV \cdots \text{①}$ また、「摩擦がないので力学的エネルギーが保存する」ので $mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 \cdots \text{②}$

問5 台上で静止したとき、両物体の床に対する速度は同じになるから、この速度を u とする。

外力がないので運動量保存則が成立するから、 $0 = mu + Mu$ より、 $u = 0$ である。よって、台は床に対して静止する。

[参考] ①より $v = -\frac{MV}{m}$ を②に代入して $mgh = \frac{1}{2} m \left(-\frac{MV}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2$ より、これを解くと

$$V = \pm \sqrt{\frac{2m^2 gh}{M(m+M)}} \text{ 、また、①に代入して } v = \mp \sqrt{\frac{2Mgh}{(m+M)}} \text{ 。小物体が斜面を降りるとき台は}$$

小物体から左向きの力を受ける。よって、小物体が点Qを通過する時、台は床に対して負の向きに進んでいる。よって、点Qを小物体が通過時、床に対する速度は、台が左に $\sqrt{\frac{2m^2 gh}{M(m+M)}}$ 、

小物体が右に $\sqrt{\frac{2Mgh}{(m+M)}}$ の速さである。外力が働くないので重心位置は不動である。また、力学的エネルギーが摩擦力に逆らってする仕事によって失うから滑る距離は変わらない。床に対して動く距離をそれぞれ x 、 X とすると、 $M(-X) + mx = 0$ 、 $X + x = l$ だから、台は左に

$$\frac{ml}{m+M} \text{ 、小物体は右に } \frac{Ml}{m+M} \text{ 移動する。}$$