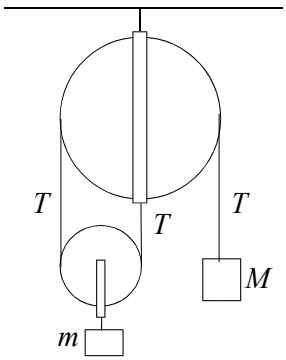
# 入試問題研究　第７回　1997 年　金沢大学 力学　①




図のように滑らかな定滑車と動滑車を組み合わせ、動滑車の軸に質量 $m$ のおもり（以下、おもりｍという）、糸の一端に質量 $M$ のおもり（以下、おもりＭという）をかけた。ただし、 $m<2M$ で、これらの滑車と糸の質量は無視できる。なお、糸の張力を $T$ 、重力加速度の大きさを $g$ 、上向きを正の方向とする。以下の問に答えなさい。

まず、おもりＭを手で支えて止めておく。

(1) 張力 $T$ を求めなさい。

(2) おもりｍが距離 $d$ だけ上がって速さ $v$ になった。おもりＭの速さを求めなさい。

(3) 二つのおもりの運動エネルギーの増加の和を求めなさい。

ここで、二つのおもりに対して外力（糸の張力と重力）がなす仕事を考える。糸の張力がなす仕事は、おもりｍに対する仕事とおもりＭに対する仕事を足し合わせるとゼロである。したがって、(3)で求めた結果は重力がこれらのおもりに対してした仕事に等しい。

(4) 二つのおもりに対して重力がした仕事の和を $m$ 、 $M$ 、 $d$ 、 $g$ を用いて表しなさい。

(5) おもりｍの速さ $v$ の２乗 $v^2$ を $m$ 、 $M$ 、 $d$ 、 $g$ を用いて表しなさい。

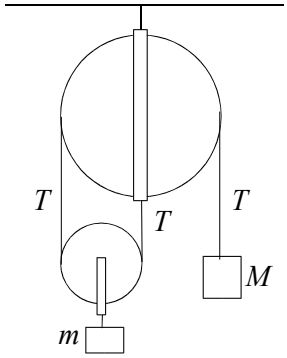
(6) おもりｍが距離 $d$ だけ上がる時間を $t$、加速度を $a$ とすると、 $v=at$ 、 $d=\frac{1}{2}at^2$ と表せる。(5)の結果を用いて $a$ を $m$ 、 $M$ 、 $d$ 、 $g$ を用いて表しなさい。

これまでは、二つのおもりをひとまとめにして扱ってきた。ここで、たとえば、おもりｍだけに注目すると、おもりｍの運動エネルギーの増加はこのおもりに働く張力と重力のなす仕事の和に等しい。

(7) この関係を与えられた記号を用いて表しなさい。さらに、(5)の結果を用いて張力 $T$ を $m$ 、 $M$ 、 $d$ 、 $g$ を用いて表しなさい。

(8) おもりｍ、Ｍのそれぞれの運動方程式を立てて、おもりｍの速度、加速度、糸の張力を求め、値が一致することを示しなさい。（追加問題）

# 入試問題研究　第７回　1997年　金沢大学　力学①　解答・解説




(1) おもりｍに働く力を考える。重力が下向きに $mg$ 、糸の張力が上向きに $2T$ でつりあう。よって、張力は $T=\frac{1}{2}mg$ だ。

参考　おもりＭに働く力を考える。重力が下向きに $Mg$ 、糸の張力が上向きに $T$ 、手で支える力が上向きに $F$ でつりあう。よって、$T+F=Mg$ だから、おもりを支える力は $F=Mg-\frac{1}{2}mg$ だ。
（条件　$m<2M$ より $F>0$ だから、支える力は上向きだ！）

(2) おもりＭの速さはおもりｍの速さの２倍であることに気づけばよい。おもりＭの速さは $2v$ である。

(3) 二つのおもりの運動エネルギーの増加の和は $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M(2v)^2$ である。

(4) 二つのおもりに対して重力がした仕事の和は $-mgd+2Mg(2d)=(2M-m)gd$ である。

(5) $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M(2v)^2=(2M-m)gd$ が成立する。 $(m+4M)v^2=2(2M-m)gd$ だから、おもりｍの速さ $v$ の２乗 $v^2$ は $v^2=\frac{2(2M-m)gd}{m+4M}$ である。これより、おもりｍの速度は $v=\sqrt{\frac{2(2M-m)gd}{m+4M}}$ である。

(6) おもりｍが距離 $d$ だけ上がる時間を $t$、加速度を $a$ とすると、 $v=at$ 、 $d=\frac{1}{2}at^2$ と表せる。 $v^2=\frac{2(2M-m)gd}{m+4M}$ に代入して、 $(at)^2=\frac{(2M-m)g(at^2)}{m+4M}$ になる。整理すると、おもりｍの加速度は $a=\frac{(2M-m)g}{m+4M}$ である。

(7) おもりｍの運動エネルギーの増加 $\frac{1}{2}mv^2$ はこのおもりに働く張力と重力のなす仕事の和 $(2T)d-mgd$ に等しいので、 $\frac{1}{2}mv^2=2Td-mgd$ が成立する。よって、$\frac{1}{2}mv^2=\frac{(2M-m)mgd}{m+4M}=2Td-mgd$ より、 $\frac{(2M-m)mgd}{m+4M}=2Td-mgd$ であるので、$2T=\frac{(2M-m)mg}{m+4M}+mg$ だから、糸の張力 $T$ は $T=\frac{3Mmg}{m+4M}$ になる。

(8) おもりｍに働く力は重力と２本の糸の張力だから、運動方程式は $2T-mg=ma$ ･･･①、おもりＭに働く力は重力と１本の糸の張力であり、加速度はおもりｍの２倍になるので、運動方程式は $Mg-T=M(2a)$ ･･･② である。①－②×2 より $2Mg-mg=ma+4Ma$ だから、おもりｍの加速度は $a=\frac{(2M-m)g}{m+4M}$ になる（一致）。等加速度運動の公式 $v^2-v_0^2=2ax$ に代入し $v^2-0^2=\frac{2\times(2M-m)g}{m+4M}\times d$ より $v^2=\frac{2(2M-m)gd}{m+4M}$ から、 $v=\sqrt{\frac{2(2M-m)gd}{m+4M}}$ だ（一致）。加速度 $a=\frac{(2M-m)g}{m+4M}$ を②に代入して $Mg-T=\frac{2(2M-m)Mg}{m+4M}$ だから、張力は $T=Mg-\frac{2(2M-m)Mg}{m+4M}=\frac{3mMg}{m+4M}$ である（一致）。