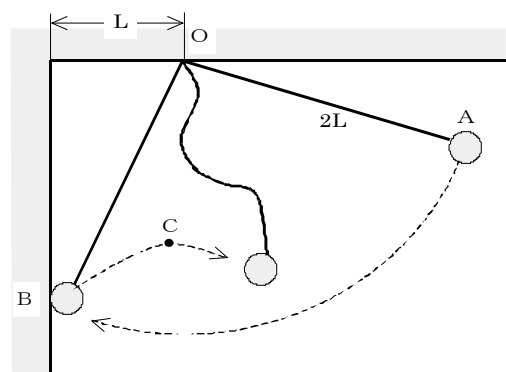


入試問題研究 第8回 2001年 東京大① (等加速度運動、衝突)

右図のように、鉛直方向に立っているなめらかな壁から距離 L の支点 O に、長さ $2L$ の糸を結びつけ、その先に質量 m の小球をつけておく。糸の質量や小球の大きさは無視でき、空気抵抗や支点での摩擦はないものとする。重力加速度を g として以下の問いに答えなさい。



I この小球を、糸をピンと張った状態で水平に近い角度でA点から静かにはなすと、糸をまっすぐに伸びた状態で運動し、小球は壁のB点に速さ v で衝突した。壁ではねかえった小球は、糸がたるんだ状態で放物運動し、もっとも高く上がった地点C点は、支点Oの真下の方向にあった。ただし、壁との衝突は完全弾性衝突とは限らない。

※「ただし、壁との衝突は完全弾性衝突とは限らない」の部分の言いたいことを掴み取れるか？

- (1) 衝突直後における小球の速度の鉛直方向成分の大きさを求めなさい。
- (2) もっとも高く上がった地点C点と衝突地点B点の高低差を求めなさい。
- (3) 衝突直後から再び糸がピンと張る状態になる瞬間までの時間を求めなさい。
- (4) 衝突直後における小球の速度の水平方向成分の大きさを、 g 、 L 、 v を用いて表しなさい。
- (5) はじめに小球をはなした位置Aと衝突点Bの高低差は h であった。壁のはねかえり係数(反発係数)を、 L および、 h を用いて表しなさい。

II 前問の糸を、質量の無視できる長さ $2L$ の変形しない棒に取り替えて、B点からの高低差 d の地点から小球を静かにはなすと、小球はB点で壁に衝突した。 ※ 棒になった意味をかんがえよ！

- (1) 衝突を完全弾性衝突であるとして、衝突の瞬間に小球が受けた力積の大きさを求めなさい。
- (2) 前問の力積のうち、壁から受けた分の大きさはいくらになるか。

入試問題研究 第8回 2001年 東京大① (等加速度運動、衝突) 解答・解説

I 等加速度運動の計算ができるか?を問う基本問題。落下運動(斜方投射運動)の計算をすればよい。

鉛直方向: 下向き g の等加速度運動、

水平方向: 等速運動

(1) 衝突直後における小球の速度の鉛直方向成分は変化しないから、衝突前の速度の鉛直成分だから、

$$\text{鉛直成分 } v \sin 30^\circ = \frac{1}{2}v \quad \text{参考 衝突前の水平成分 } v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}v}{2}$$

(2) もっとも高く上がった地点C点での鉛直方向の速度はゼロになるから、 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ より、

$$0^2 - \left(\frac{1}{2}v\right)^2 = 2(-g)y \text{ を満たす。よって、} y = \frac{v^2}{8} \text{ より、高低差は } \frac{v^2}{8} \text{ である。}$$

(3) 図より、糸が再び張るのは同じ高さになったときだから、 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ より、 $0 = \frac{v}{2} \cdot t + \frac{1}{2}(-g)t^2$

だから、 $t = \frac{v}{g}$ である。したがって、糸が再び張る時刻は壁に跳ね返されてから $\frac{v}{g}$ の時刻である。

(4) 水平方向の衝突直後の速さを v_x とする。水平方向は等速運動になるから、 $L = v_x \cdot \frac{v}{2g}$ が成立する。

したがって、 $v_x = \frac{2gL}{v}$ だから、衝突直後の水平方向成分は $\frac{2gL}{v}$ である。

(5) 力学的エネルギー保存の法則より、 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ が成立する。よって $v^2 = 2gh \cdots \textcircled{1}$ である。

はねかえり係数の公式より、 $e = \left(\frac{2gL}{v}\right) / \left(\frac{\sqrt{3}v}{2}\right) = \frac{4gL}{\sqrt{3}v^2} \cdots \textcircled{2}$ が成立する。

②に①を代入して v を消去すると、はねかえり係数は $e = \frac{2\sqrt{3}L}{3h}$ である。

II 外力があるときは「運動量の変化」=「力積」、外力が働かないときは「運動量保存の法則」が成立する。

(1) エネルギー保存の法則を用いて衝突直前の速さを求める。 $mgd = \frac{1}{2}mv^2$ より、 $v = \sqrt{2gd}$ だ。

また、衝突前後での運動量の変化が力積に等しいので、 $-mv - (mv) = -2mv$ が成立する。

よって、小球が受ける力積の大きさは $2\sqrt{2m^2gd}$ (向きは水平より斜め右下 30° の向き)である。

(2) 棒からの抗力 F 、壁からの垂直抗力を N 、時間を Δt とすると、棒から受ける力積は棒の方向、壁からの力積は壁に垂直方向(右図)の和が小球が受けた力積である。

小球が受ける力積は $2\sqrt{2m^2gd}$ (水平より斜め右下 30° の向き=棒に垂直方向)である。棒に平行な成分では打ち消しあうので

$N \Delta t \cdot \sin 30^\circ = F \Delta t \cdots \textcircled{1}$ より $N = 2F$ が成立する。

また、棒に垂直な成分は小球が受けた力積に等しくなり $N \Delta t \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{2m^2gd}$ が成立する。

よって、 $N \Delta t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2m^2gd} \cdots \textcircled{2}$ より、壁からの力積は $N \Delta t = \frac{4\sqrt{6m^2gd}}{3}$ になる。

[参考] また、①に代入して、棒からの力積は $F \Delta t = N \Delta t \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{6m^2gd}}{3}$ である。

