入試問題研究 第９回 2002年度 阪大理後期①　　～ 運動方程式応用 ～

図1のような、水平面と θ の角をなし、滑らかな斜面を持つ質量 M の三角柱があり、その頂点に質量の無視できるくぎが固定されている。このくぎに糸の一端を結び、糸の他端には斜面に置かれた質量 m の大きさの無視できる物体 P が結ばれている。水平床上に固定した $(x,\ y)$ 座標と三角柱に固定した $(X,\ Y)$ 座標を図1のようにとる。

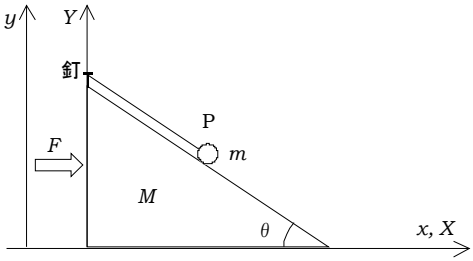

図1

はじめ、三角柱は滑らかな水平床上を x 軸負の方向に滑っていける。こjこで、三角柱に x 軸正の方向に一定の力 F を加え続けて、三角柱を減速させる。力 F は十分に弱く、糸はピンと張っており、物体 P は三角柱に対して相対的に静止している。重力加速度を g として、以下の問いに答えなさい。

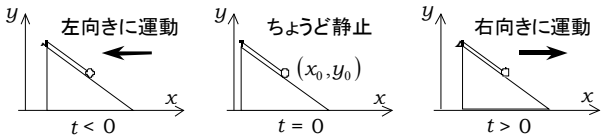

図2

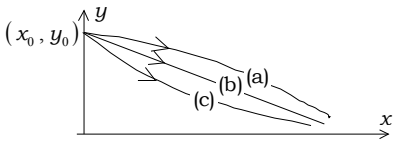

図3

問1.　三角柱の水平床に対する加速度の x 成分 A_0 を求めなさい。

問2.　糸の張力を T、物体 P に働く斜面からの垂直抗力を R_0 とする。
三角柱とともに運動する観測者からみると、物体 P には三角柱の加速度による慣性力が働いている。このことを考慮して、三角柱とともに運動する観測者からみた物体 P の X 軸方向および、Y 軸方向nお運動方程式（力のつりあいの式）を書きなさい。

問3.　糸の張力 T を F、M、m、θ 、g を用いて表しなさい。

しばらくすると、三角柱の水平床に対する速度がゼロになった。その時刻を $t=0$ とする。この瞬間に糸を切る。力 F はそのまま加え続ける。図2は、$t<0$ 、$t=0$ 、$t>0$ における]三角柱の運動の様子である。時刻 $t=0$ での物体 P の $(x,\ y)$ 座標を $(x_0,\ y_0)$ として、その後の三角柱と物体 P の運動を考える。物体 P は常に斜面上にあるものとし、物体 P に働く斜面からの垂直抗力を R とする。

問4.　三角柱の水平床に対する加速度の x 成分を A として、三角柱の x 軸方向の運動方程式を R を含んだ式で表しなさい。

問5.　物体 P に働く力の x 成分を f_x 、y 成分を f_y とし、水平床に対する加速度の x 成分を a、y 成分を b とすると、物体 P の運動方程式は $ma=f_x$ …(1)、$mb=f_y$ …(2) と表される。f_x と f_y を R を含んだ式で表しなさい。

問6.　三角柱とともに運動する観測者からみた物体 P の加速度の X 成分を a' として、この観測者からみた物体 P の X 軸方向の運動方程式を a'、f_x 、A を含んだ式で表しなさい。また、この結果と問5の(1)式とを比較することにより、a' を a と A とで表しなさい。

問7.　三角柱とともに運動する観測者からみた物体 P の速度ベクトル $\vec{V}$ の X 成分、Y 成分は、それぞれ $V_X=a't$ 、$V_Y=bt$ である。物体 P が斜面上にあることから、速度ベクトル $\vec{V}$ は斜面に沿った方向を向いている（ $V_Y<0$ であることに注意）。これより、a' と b との間の関係式を求めなさい。

問8.　物体 P が三角柱の斜面を滑り降りているときの $(x,\ y)$ 平面上の軌跡として、正しいものを図3の(a)、(b)、(c)の中から選びなさい。

問9.　問4から問7までの答えから A、a、a'、b を消去すると垂直抗力 R が求まる。R を F、M、m、g、θ で表しなさい。

入試問題研究　2002年度 阪大理後期①　～ 運動方程式 ～　解答・解説

※ 運動方程式を作るだけなのだが、色々な力が複雑に関係しているので注意が必要だ。

問1.　全体の運動方程式を考えるだけだ。運動方程式は $(M+m)A_0=F$ より、$A_0=\dfrac{F}{M+m}$ である。

問2.　糸の張力を T、斜面からの垂直抗力を R_0 とすると、X方向、Y方向について、つりあいの関係より、
X方向について、慣性力も考慮して $-T\cos\theta+R_0\sin\theta-mA_0=0$ …①
Y方向について 、$-mg+T\sin\theta+R_0\cos\theta=0$ …② の式が成立する。

問3.　①、② より、R_0 を消去すると、$-T\cos^2\theta-mA_0\cos\theta+mg\sin\theta-T\sin^2\theta=0$ になる。
これより、張力は $T=mg\sin\theta-mA_0\cos\theta=mg\sin\theta-\dfrac{Fm\cos\theta}{M+m}$ である。

。

問4.　三角柱の水平床に対する加速度の x 成分をAとして、三角柱の x 軸方向の運動方程式は、外力 F、垂直抗力 R だから、三角柱の X 軸方向の運動方程式は $MA=F-R\sin\theta$ である。

問5.　物体Pに働く力は重力 mg、垂直抗力 N の2力だから、物体Pに働く力の x 成分は $f_x=R\sin\theta$ 、y 成分は $f_y=R\cos\theta-mg$ である。よって、$ma=f_x$ …(1)、$mb=f_y$ …(2) である。

問6.　三角柱とともに運動する観測者からみた物体Pの加速度の X 成分を a' として、この観測者からみた物体Pの X 軸方向の運動方程式は、$ma'=f_x-mA$ である。また、問5の(1)式 $ma=f_x$ より、$ma'=ma-mA$ だから、$a'=a-A$ が成立する。

問7.　三角柱とともに運動する観測者からみた物体Pの速度ベクトル $\vec{V}$ の X 成分、Y 成分は、それぞれ $V_X=a't$ 、$V_Y=bt$ である。物体Pが斜面上にあることから、速度ベクトル $\vec{V}$ は斜面に沿った方向を向いている（ $V_Y<0$ であることに注意）ので、$\dfrac{V_Y}{V_X}=\dfrac{bt}{a't}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。これより、$b=-a'\tan\theta$ である。

問8.　物体Pは $X=\dfrac{1}{2}a't^2$ 、$V_Y=bt$ であるから、床から見たとき、$x=x_0+\dfrac{1}{2}a't^2+\dfrac{1}{2}At^2$ 、$y=y_0+\dfrac{1}{2}bt^2$ より、$x-x_0=\dfrac{1}{2}(a'+A)t^2$ 、$y-y_0=\dfrac{1}{2}bt^2$ だから、$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{b}{a'+A}$ で一定値になるから、傾き一定の直線になるから、グラフの(b) がそれに当たる。

問9.　問4より、$MA=F-R\sin\theta$ …①、問5より、$ma=R\sin\theta$ …②、$mb=R\cos\theta-mg$ …③、問6より、$a'=a-A$ …④、問7より、$b=-a'\tan\theta$ …⑤ の5式が成立する。
未知数が A、a'、a、b、R の5つだから、A、a、a'、b を消去（数学の計算力必要）するだけで終わる。
計算して求めると、垂直抗力 R は $R=\dfrac{m(F\sin\theta+Mg\cos\theta)}{M+m\sin^2\theta}$ である。