

入試問題研究 2003年 九州大学 ① 力学 (問題)

長さ l [m] の棒の両端に、それぞれ質量 m_A [kg]、 m_B [kg] のおもり A、B を取り付けた物体がある。これを最初、図 1 のように、B を水平な床につけたまま、A には水平方向右向きに力 $\vec{F}_A$ [N] を、B には水平左向きに力 $\vec{F}_B$ [N] を加えることにより、鉛直方向から反時計回りに θ_0 [rad] だけ傾いた状態で静止させた。その後、力 $\vec{F}_A$ と力 $\vec{F}_B$ を同時に取り去った。B は床から離れることはなく、B と床との接触は滑らかであるとする。運動中の物体の鉛直方向からの傾きを θ [rad] とし、反時計回りを正とする。重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、棒の質量と太さ、空気の抵抗は無視できるものとして、以下の間に答えよ。

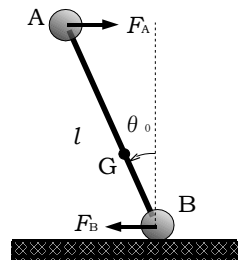


図 1

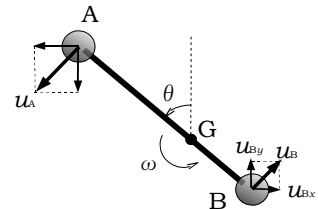


図 2

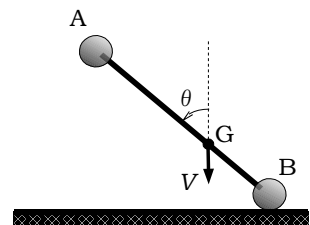


図 3

問 1 力 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B$ によりこの物体を θ_0 だけ傾いた状態で静止させているとき、棒からおもりに働く力は棒に平行であるとして次の小問に答えよ。

- (1) 力 $\vec{F}_A$ の大きさを m_A 、 θ_0 、 g を用いて表せ。
- (2) おもり A に棒から働く力の大きさ T [N] を、 m_A 、 θ 、 g を用いて表せ。
- (3) おもり B に床から働く垂直抗力の大きさ N [N] を m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

問 2 この物体の重心 G は A と B を結ぶ線上にある。重心 G から B までの距離[m] を l 、 m_A 、 m_B で表せ。

問 3 力 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B$ を同時に取り去った後、この物体には水平方向の力が働かないので、重心 G の速度 $\vec{V}$ [m/s] は鉛直方向の速度成分のみを持つ。一方、A、B の重心 G の速度と、重心 G に対するそれぞれの相対速度の合成になる。A、B の重心 G に対する相対運動は、重心 G を中心とする回転運動である。速度の水平方向成分は右向きを、鉛直方向成分は上向きをそれぞれ正とし、また角速度は反時計回りを正として次の小問に答えよ。

- (1) ある瞬間の相対運動の角速度を ω [rad/s]、そのときの物体の鉛直方向からの傾きを θ とする。図 2 を参照して B の重心 G に対する相対速度 $\vec{u}_B$ [m/s] の鉛直方向成分 u_{By} [m/s] を l 、 m_A 、 m_B 、 θ 、 ω で表せ。
- (2) B が床から離れないので、B の速度の鉛直方向成分は常にゼロとなる。図 3 のように鉛直方向からの傾きが θ のとき、重心 G の速度は鉛直下向きで大きさが V [m/s] であった。このときの相対運動の角速度 ω を l 、 m_A 、 m_B 、 θ 、 V で表せ。
- (3) このときの B の速度の水平方向成分 V_{Bx} [m/s]、A の速度の水平方向成分 V_{Ax} [m/s] と鉛直方向成分 V_{Ay} [m/s] を m_A 、 m_B 、 θ 、 V のうちから適当なものを用いてそれぞれ表せ。

問 4 力 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B$ を傾き θ_0 で取り去った後、物体の傾きはしだいに増加する。このとき力学的エネルギーが保存され、おもり A の位置エネルギーが減少した分だけ、おもり A とおもり B の運動エネルギーが増加する。力 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B$ を取り去った後、A が床に衝突する直前の A の速度の向きと大きさ [m/s] を求めよ。ただし、 θ が $\frac{\pi}{2}$ に達したときに A が床に衝突するものとし、速度の大きさは l 、 θ_0 、 g を用いて表せ。

入試問題研究 2003年 九州大学 ① 力学 (解答・解説)

問1 **重要** 物体が静止しているとき、「力のつりあい」と「力のモーメントのつりあい」がともに成立する。

(1) B点を中心とするモーメントのつりあいを考える。 $m_A g \cdot l \sin \theta_0 = \vec{F}_A \cdot l \cos \theta_0$ だから、物体Aを押す力は $\vec{F}_A = m_A g \cdot \tan \theta_0$ [N] である。

(2) おもりAに働く鉛直方向の力のつりあいを考える。棒に働く力の大きさ T [N] として $m_A g = T \cos \theta_0$ が成立するから棒に働く力の大きさは $T = \frac{m_A g}{\cos \theta_0}$ [N] である。

(3) おもりBに働く鉛直方向の力のつりあいを考える。おもりBに床から働く垂直抗力の大きさ N [N] とすると、 $N = m_B g + T \cos \theta_0$ だから、 $N = (m_A + m_B) g$ である。

問2 重心の公式 $x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ より、Bを原点として $d = \frac{m_A \times l + m_B \times 0}{m_A + m_B} = \frac{m_A l}{m_A + m_B}$ である。

問3 「絶対速度」=「基準の速度」+「基準から見た相対速度」※ベクトル(向きと大きさ)で考える!

(1) 重心から見る角速度を ω の円運動になるから、 $\vec{u}_B = \frac{m_A l}{m_A + m_B} \cdot \omega = \frac{m_A l \omega}{m_A + m_B}$ である。

傾きが[m/s] θ だから、鉛直方向成分は $\vec{u}_{By} = \vec{u}_B \cdot \sin \theta = \frac{m_A l \omega \sin \theta}{m_A + m_B}$ である。

(2) 鉛直方向では、床から見たBの速度(ゼロ)は、重心から見たBの速度 $\left(\frac{m_A l \omega \sin \theta}{m_A + m_B} \right)$ と、

床から見た重心速度($-V$)の和であるから、 $\frac{m_A l \omega \sin \theta}{m_A + m_B} + (-V) = 0$ が成立する。

よって、このときの相対運動の角速度 ω は、 $\omega = \frac{(m_A + m_B) V}{m_A l \sin \theta}$ である。

(3) このときのBの速度の水平方向成分 $V_{Bx} = 0 + \vec{u}_B \cdot \cos \theta$ だから、 $V_{Bx} = \frac{V}{\tan \theta}$ になる。

重心から見たAの速度は $\vec{u}_B = \left(l - \frac{m_A l}{m_A + m_B} \right) \cdot \omega = \frac{m_B l \omega}{m_A + m_B}$ の回転運動だから、床から

見たAの水平方向成分は $V_{Ax} = 0 + \left(-\frac{m_B l \omega}{m_A + m_B} \cos \theta \right)$ より、 $V_{Ax} = -\frac{m_B V}{m_A \tan \theta}$ であり、

鉛直方向成分は $V_{Ay} = (-V) + \left(-\frac{m_B l \omega}{m_A + m_B} \sin \theta \right)$ より $V_{Ay} = -\frac{(m_A + m_B) V}{m_A}$ である。

問4 力学的エネルギー保存の法則より、おもりAの位置エネルギーの減少分($m_A g l \cos \theta_0$)がおもりAとおもりBの運動エネルギーが増加分 $\left(\frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 \right)$ と等しくなる。

また、 $V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2$ 、 $V_B^2 = V_{Bx}^2 + V_{By}^2$ だから、問3(3)より速度成分を求めると、Aが床に落下するとき $\theta = \frac{\pi}{2}$ より、水平方向成分はゼロ($V_{Ax} = V_{Ay} = V_{Bx} = 0$)、鉛直成分は

$V_{Ay} = -\frac{(m_A + m_B) V}{m_A}$ だから $m_A g l \cos \theta_0 = \frac{1}{2} m_A \left(\frac{(m_A + m_B) V}{m_A} \right)^2$ である。重心速度は

$V = \frac{m_A \sqrt{2 g l \cos \theta_0}}{(m_A + m_B)}$ より、Aは $V_{Ay} = -\frac{(m_A + m_B) V}{m_A} = \sqrt{2 g l \cos \theta_0}$ [m/s] (鉛直下向き)。

※ Aが床に落下したとき、A、Bともに水平方向速度はゼロ、Bの鉛直方向速度は当然ゼロだ。結果として、Aの位置エネルギーが運動エネルギーになるのだから、力学的エネルギー保存の法則より $m_A g l \cos \theta_0 = \frac{1}{2} m_A V_{Ay}^2$ より、 $V_{Ay} = \sqrt{2 g l \cos \theta_0}$ になるだけのことですね!