入試問題研究　第 101 回　2002 年度　金沢大学　前期　②

図 2a の ABCD は、質量 m [kg]、抵抗 r [Ω]、一辺の長さ a [m] の正方形の 1 回巻きコイルである。いま、コイルは紙面（鉛直面）内にあって静止しており、その底辺 BC は水平に保たれている。コイルの真下にある矩形の領域 PQRS には、紙面に垂直に表から裏へ向いた磁束密度 B [T] の一様な磁場がある。PQ の長さは L [m] であり、$L > a$ とする。PS は水平であり、PS の長さは a よりも十分長い。

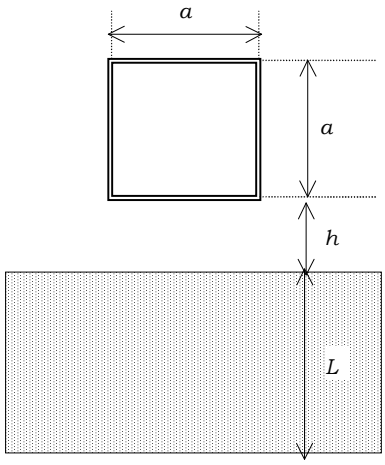

図 2a

コイルを静かに放したところ、コイルは回転することなく磁場領域を通って落下した。図 2b、c、d、e は落下中のコイルの上辺または下辺が磁場領域の境界と接する瞬間を現している。重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

コイルが図 2b から図 2c の間を落下している場合について考える。

(1) コイルの落下速度が v [m/s] となったとき、コイルに流れる電流の向きと大きさを求めなさい。電流の向きは、図における反時計回りを正、時計回りを負として、正負の符号を付して答えなさい。

(2) このとき、磁場がコイルに及ぼす力の向きと大きさを求めなさい。力の向きは鉛直下向きを正として、正負の符号を付して答えなさい。

(3) このとき、コイルに発生する単位時間当たりのジュール熱と、磁場がコイルに及ぼす力のなす仕事の仕事率を求めなさい。

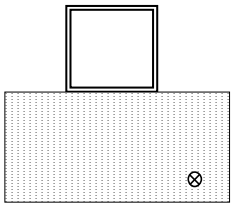
図 2b

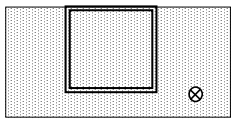
図 2c

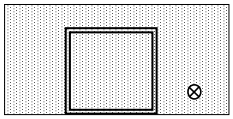
図 2d

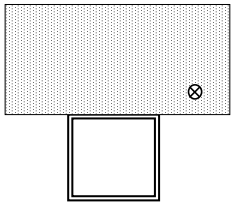
図 2e

コイルを放すときの BC と PS の距離を h [m] にしたところ、図 2b から図 2c の間のコイルの運動は等速度運動となった。

(4) B^2 と h の間の関係式を示しなさい。

(5) コイルが図 2b から図 2c まで落下する間に、コイルに発生したジュール熱を Q [J]、磁場がコイルにした仕事を W [J]、コイルの力学的エネルギーの変化を ΔE [J] と書く。Q と ΔE の間に成立する関係を示しなさい。

(6) コイルが図 2d から図 2e まで落下する間に、コイルに発生したジュール熱は q [J] であった。図 2e におけるコイルの落下速度を求めなさい。

入試問題研究　第 101 回　2002 年度　金沢大学　前期　② 解答･解説

コイルが図 2b から図 2c の間を落下している場合について考える。

(1) コイルの落下速度が v [m/s] となったとき、コイルを貫く磁束の変化は $\Delta\Phi = Bav\Delta t$ である。電磁誘導の法則 $V = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ に代入して誘導起電力の大きさを求めると $V = Bav$ である。コイルの抵抗は r であるから、コイルに流れる電流大きさは $I = \dfrac{Bav}{r}$ （向きは反時計回りだから）である。

(2) 磁場がコイルに及ぼす力は $f = IBl\sin\theta$ の公式に代入すると、大きさが $\dfrac{Bav}{r}\cdot B\cdot a = \dfrac{B^2a^2v}{r}$ 向きが負（鉛直上向き）だから、磁場から受ける力は $f = -\dfrac{B^2a^2v}{r}$ である。

(3) コイルに発生する単位時間当たりのジュール熱の公式は $P = I^2r$ に代入して、$P = \dfrac{B^2a^2v^2}{r}$ である。

また、磁場がコイルに及ぼす力のなす仕事の仕事率は $P = fv = \left(-\dfrac{B^2a^2v}{r}\right)\cdot v = -\dfrac{B^2a^2v^2}{r}$ を求めなさい。

コイルを放すときの BC と PS の距離を h [m] にしたところ、図 2b から図 2c の間のコイルの運動は等速度運動となった →「重力と磁場からの力がつりあった」

(4) 図2bの位置まで落ちるのは自由落下運動である。等加速度運動の公式より $v^2 - 0^2 = 2gh$ だから、図 2b の直前の速度は $v = \sqrt{2gh}$ …①、また、その後は等速運動になるから磁場からの力と重力がつりあう。よって、$\dfrac{B^2a^2v}{r} = mg$ …② が成立する。①を②に代入して $\dfrac{B^2a^2\sqrt{2gh}}{r} = mg$ …③ である。これより、整理すると、$B^2 = \dfrac{mr}{a^2}\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$ である。

(5) コイルが図 2b から図 2c まで落下する時間は $t = \dfrac{a}{\sqrt{2gh}}$ になる。

よって、コイルに発生したジュール熱は、$Q = \left(\dfrac{B^2a^2\cdot 2gh}{r}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{\sqrt{2gh}}\right) = \dfrac{B^2a^3\sqrt{2gh}}{r} = mga$ [J]、

磁場がコイルにした仕事は、$W = \left(-\dfrac{B^2a^2\cdot 2gh}{r}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{\sqrt{2gh}}\right) = -\dfrac{B^2a^3\sqrt{2gh}}{r} = -mga$ [J]、

コイルの力学的エネルギーの変化は、$\Delta E = -mga$ [J] である。

よって、$Q + \Delta E = 0$ である。

(6) 図 2c から図 2d までは磁束の変化がないので、コイルには電流が流れない。よって、磁場からの力はゼロだから、等加速度運動になる。よって、図 2d の直前のコイルの速度は $v_d^2 - \left(\sqrt{2gh}\right)^2 = 2g(L-a)$ であるので、$v_d = \sqrt{2g(h+L-a)}$ である。 また、運動エネルギーは $K = \dfrac{1}{2}mv_d^2 = mg(h+L-a)$ になる。

コイルが図 2d から図 2e まで落下する間に、コイルに発生したジュール熱は q [J] であった。その間の重力による位置エネルギー変化は $-mga$ [J] であるので、図 2e におけるコイルの落下速度を v_e とすると、エネルギー保存の法則から、$mg(h+L-a) = -mga + q + \dfrac{1}{2}mv_e^2$ が成立する。

以上より、図 2e におけるコイルの落下速度は $v_e = \sqrt{2g(h+L) - \dfrac{2q}{m}}$ [m/s] である。