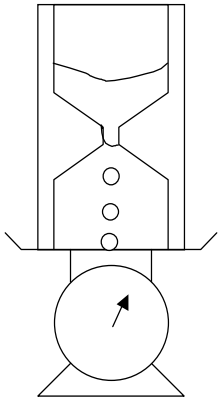
入試問題研究　第 102 回　　１９９７年　武蔵工業大学　　力学

図のように砂時計をはかりの上にのせ、はかりの読みが時間と共にどのように変化すかを考える。初め、すべての砂(質量 m[kg])は容器(質量 M[kg])の上部にあり、砂が落ち初める時刻を $t = 0$[s]とする。重力加速度を g[m/s^2]とすれば、$t = 0$ で砂時計全体の重さは$(M+m)$[kg]なので、はかりは $M+m$[kgw]の読みを示す。砂が容器下部に出て行く割合は一定で k[kg/s]とし、また、底面に溜まる砂の厚さは無視できて、すべての砂粒子が初速度ゼロで、容器のくびれから底面までの距離 h[m]を自由落下し、底面と衝突した瞬間に速度がゼロになるとする。以上に与えた量を用いて、以下の問１から問6の答を記入し、問3および問4ではの計算過程も示しなさい。



問1.　砂が初めて容器の底面に衝突する時期 t_1[s]を求めなさい。また、$0 < t < t_1$ におけるはかりの読み W[kgw]を t[s]の関数として表しなさい。

問2.　砂粒子が底面に衝突する直前の速さ v[m/s] はいくらになるか。

問3.　時間 Δt の間に底面と衝突する砂が底面に与える衝撃力の平均値 F[N]を、この時間の間に容器底面が砂に与える力積を考えることにより求めなさい。

問4.　砂が容器の上部から完全に無くなる時刻を t_2[s]、衝撃力の平均値 F[N]がはかりにかかる重さに加わるとして、$t_1 < t < t_2$ におけるはかりの読み W[kgw]を t[s]の関数として表しなさい。

問5.　砂がすべて底面上に落下し終わる時刻 t_3[s]を求めなさい。また、$t_2 < t < t_3$ でのはかりの読み W[kgw]を t[s]の関数として表しなさい。

問6.　はかりの読みは、時刻 t_1 および t_2 で不連続に変化する。また、$t_3 < t$ では初めの読み$(M+m)$[kgw]と等しく一定となる。この事に注意し、はかりの読みを時間の関数としてグラフで示しなさい。ただし、縦軸 W[kgw]の目盛りは適当にとり、また、読みの最小値と最大値がいくらになるかを示しなさい。

入試問題研究　第 102 回　　１９９７年　武蔵工業大学　　力学　　解答･解説

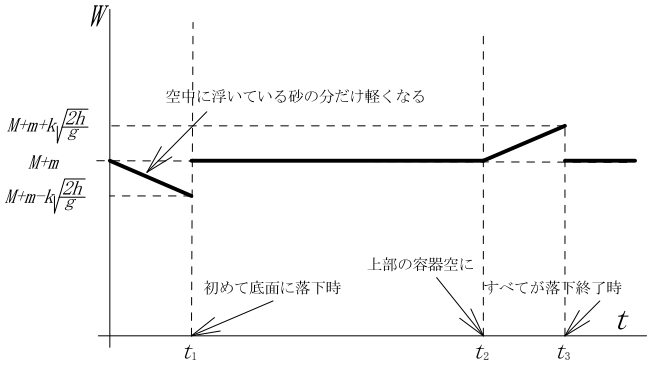
砂粒子が空中に入る状態では容器に力は及ぼさない。したがって、空中にいる砂の重さだけ軽くなる。また、砂粒子が容器底面に衝突するときに容器に与える力積分だけ容器底面に加わる力は増加する。このことを考慮して問題を解けば良い。

問1.　砂粒子がくびれから容器下部の底面に達するまでの時間は、高さ h[m]の自由落下の時間に等しい。したがって、等加速度運動の公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ に代入して $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ だから、落下時間は $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [s]である。また、空中に入る砂粒子の分だけ軽くなるので、はかりが示す目盛りは $W = M + m - kt$ [kgw]である。底面に達する直前の目盛りは $W_{t_1} = M + m - k\sqrt{\frac{2h}{g}}$ [kgw] になる。

問2.　等加速度運動の公式 $v = v_0 + at$ より、底面に達する直前の速度は $v = gt_1 = \sqrt{2gh}$ [m/s] である。

問3.　容器底面での衝突の前後での砂粒子の運動量変化の大きさは $k\Delta t \times v = k\sqrt{2gh}\Delta t$ であるので、底面が受ける力積の大きさは $k\sqrt{2gh}\Delta t$ である。平均の衝撃力 F とすると、$k\sqrt{2gh}\Delta t = F\Delta t$ だから、容器底面が受ける衝撃力は $F = k\sqrt{2gh}$ [N]である。

問4.　t_1 から t_2 の間では、空中にいる砂粒子の重さが常に $kgt_1 = kg \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = k\sqrt{2gh}$ [N]である。これによる重さの減少と底面が受ける衝撃力の大きさが等しくなるので、$W = M + m$ [kgw]である。

問5.　砂がすべて容器上部から無くなる時刻は $t_2 = \frac{m}{k}$ [s]である。したがって、砂粒子すべてが容器底面に落下し終わる時刻は $t_3 = \frac{m}{k} + t_1 = \frac{m}{k} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [s]である。また、容器上部の砂粒子が落下し終わってからは、空中にいる砂粒子の量は段々減少してくる。しかし、落下する砂粒子がなくなるまで衝撃力はおなじである。よって、$W = M + m - k\{t_1 - (t - t_2)\} + k\sqrt{\frac{2h}{g}}$ [kgw] であるので、はかりの目盛りは $W = M + m + k(t - t_2)$ である。全砂粒子が落下し終わる直前でのはかりの目盛りは、$W_{t_3} = M + m + k\sqrt{\frac{2h}{g}}$ [kgw] である。すべて落下し終わった後では常に $W = M + m$ [kgw]に戻る。

問6.　右グラフ参照