

入試問題研究 第 103 回 1997 年 姫路工業大学 理学部 気体の変化

重力のもとで静止している大気がある。この大気の中で高さ h [m] にあり、温度 T [K]、圧力 P [Pa]、体積 V [m^3] の空気 1mol を考える。今、この 1mol の空気が外から熱を加えられずに高さ Δh [m] だけ上方に移動した。このとき温度、圧力、体積がそれぞれ $T + \Delta T$ [K]、圧力 $P + \Delta P$ [Pa]、体積 $V + \Delta V$ [m^3] に変化した。この問題では、移動にともなう空気の温度変化を考えてみる。以下の問いに答えなさい。ただし、空気を分子量 M の理想気体とみなし、気体定数、重力加速度はそれぞれ R [J/mol·K]、 g [m/s²] とする。また、 ΔP 、 ΔV 、 ΔT はそれぞれ P 、 V 、 T に比べて十分小さく、積 $\Delta P \cdot \Delta V$ は無視できるものとする。

問1. 大気圧の原因を考えて ΔP と Δh の関係式を作りなさい。

問2. 移動前後の空気に状態方程式を適用し、 ΔP 、 ΔV 、 ΔT の関係式を作りなさい。

問3. 空気は断熱的に移動したとして、 ΔT と ΔV の関係式を作りなさい。

ただし、空気の定積モル比熱 C_V は、すべて 2 原子分子から出来ているとして、 $C_V = \frac{5}{2}R$ であるとしなさい。

問4. 以上の結果より ΔT と Δh の関係式を作りなさい。

問5. 次に、実際の空気としての数値、 $M = 29$ 、 $R = 8.3$ [J/mol·K]、 $T = 280$ [K] として、空気の 100[m] の上昇にともなってこの空気の温度がどのように変わるかを計算しなさい。数値は有効数字 2 桁で示しなさい。」

入試問題研究 第103回 1997年 姫路工業大学 理学部 気体の変化 解説

問1 高さ h と $h + \Delta h$ の圧力を P 、 $P + \Delta P$ とする。 Δh は小さいので ΔP は小さい。高さ h と $h + \Delta h$ の間の空気の密度(質量を体積で割ったもの)は、ほぼ $\rho = \frac{M}{1000V}$ であるとみなせる。したがって、高さ $h + \Delta h$ の圧力 $P + \Delta P$ は、その間に含まれる気体の重さに相当する圧力分だけ P より小さい。よって、力のつりあいの式 $(P + \Delta P)S + \rho S \Delta h g = PS$ だから、 $P + \Delta P + \rho \Delta h g = P$ より、

$$\Delta P = -\rho g \Delta h = -\frac{Mg \Delta h}{1000V} = -\frac{Mg \Delta h}{1000RT} \dots \boxed{\text{問1}} \text{ とかける。}$$

問2 高さ h と 高さ $h + \Delta h$ での空気の状態方程式を考えると $PV = RT$ 、 $(P + \Delta P)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T)$ が成立する。二式を辺々引き算して、

$$P \cdot \Delta V + \Delta P \cdot V + \Delta P \cdot \Delta V = R \cdot \Delta T \text{ が得られる。また、微少量の積「} \Delta P \cdot \Delta V \text{ 」は非常に小さいから無視できる。したがって、} P \cdot \Delta V + \Delta P \cdot V = R \cdot \Delta T \dots \boxed{\text{問2}}$$

問3 高さ h から $h + \Delta h$ へと空気が移動する過程は断熱変化であるので、その間では、内部エネルギーの変化と気体が外部にした仕事の間には、

$$\Delta U + W = 0 \text{ の関係が成立する。これに内部エネルギーの変化 } \Delta U = \frac{5}{2} R \Delta T \text{ と、気体が外部にした仕事}$$

$W = P \Delta V$ を代入すると、 $\frac{5}{2} R \Delta T + P \Delta V = 0 \dots \boxed{\text{問3}}$ である。※これが基本の方法だ！断熱変化の公式を使っても良い(次に示す)。

別解 断熱変化の公式 $PV^\gamma = \text{一定}$ ($\gamma = C_p / C_v = 1.4$) より、 $PV^\gamma = (P + \Delta P)(V + \Delta V)^\gamma$ から、

$$1 = \left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma \text{ だから、} \gamma P \Delta V + V \Delta P = 0 \text{ である。問2を代入して、} \gamma P \Delta V + (R \Delta T - P \Delta V) = 0 \text{ より、}$$

$$(\gamma - 1)P \Delta V + R \Delta T = 0 \dots \boxed{\text{問3}} \text{ になる。したがって、} P \Delta V + \frac{5}{2} R \Delta T = 0 \text{ と同じ解が出てくる。また、断熱変化の式 } TV^{\gamma-1} = \text{一定、} \gamma = C_p / C_v = 1.4 \text{ からでも、} TV^{\gamma-1} = (T + \Delta T)(V + \Delta V)^{\gamma-1} \text{ より、} V \Delta T + (\gamma - 1)T \Delta V = 0 \dots \boxed{\text{問3}} \text{ だから、} PV = RT \text{ より、} R \Delta T + (\gamma - 1)P \Delta V = 0 \text{ になり、どれでも同じ関係式だ。どれでも正解になる。}$$

問4 問2の式に問1、問3の式を代入すると、 $-\frac{5}{2} R \Delta T - \frac{Mg \Delta h}{1000} = R \Delta T$ が得られる。これより、気体が上昇

するときの温度変化 $\Delta T = -\frac{Mg \Delta h}{3500R} \dots \boxed{\text{問4}}$ が得られる。※問1、2、3の関係式から高さと温度の関係を求める。

問5 問4の気体が上昇する時の温度変化的関係式に具体的な数値を代入して 100[m]あたりの温度変化を求める、 $\Delta T = -\frac{29 \times 9.8 \times 100}{3500 \times 8.3} = -0.978\dots$ になる。したがって、空気は『100[m]上昇する毎に 0.98°C 温度が低下する』…**問5** ことが分かる。

参考 大気圧と高さの関係を求める。問1の式より $\frac{\Delta P}{P} = -\frac{Mg}{1000RT} \Delta h$ が成立する。極限値をとり、両辺

積分すると、 $\int \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{1000RT} \int dh$ の関係式が成立する。これより、 $\log|P| = -\frac{Mgh}{1000RT} + C$ である。したがつ

て、高さ h [m]での大気圧は $P(h) = P_0 e^{-\frac{Mgh}{1000RT}}$ (ただし、 P_0 は高さゼロの地面での大気圧)となる。この関係は、登山などの高度計(高さを測定するもの)に利用されている。大気圧の変化を測って、登った山の高さを求めるために実際に使われている。

また、気象用語で「フェーン現象」というものがある。水蒸気を含んだ空気が山を越えるときに上昇につれて気温が低下する。このときに水蒸気の飽和蒸気圧が下がるため、水蒸気が飽和し水滴が出来る(雨が降る)。このとき水蒸気の凝縮熱(540 cal/g)が発生するため、気温低下は「上の問題での気温低下率($0.98^{\circ}\text{C}/100\text{m}$)」より小さくなる($0.5^{\circ}\text{C}/100\text{m}$)。山を越え、その空気が下降すると気温上昇は、 $0.98^{\circ}\text{C}/100\text{m}$ で上昇するので、吹き降ろしの風は元より温度は上昇する。100%の湿度の場合、100mあたりで 0.5°C にもなるから、3000m 級の山脈を越える湿った風では最大 15°C もの気温上昇になる。日本最高気温の記録はこの「フェーン現象」が原因となっての記録であり、その場所は南の沖縄ではなく、北の東北地方の「山形市」である。

