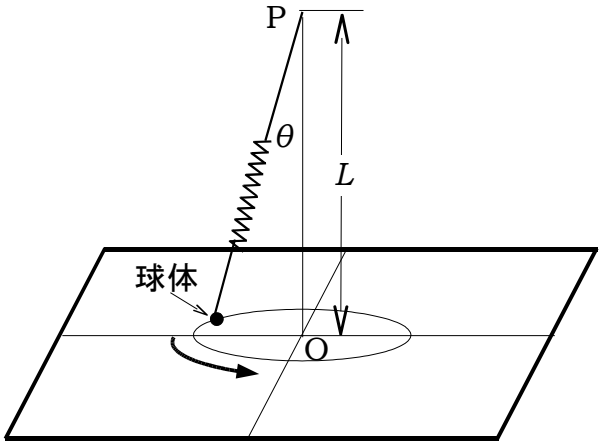
入試問題研究　第１０５回　２００４年　筑波大学　①　力学（円運動）

水平な面上の点Oに質量 m の小さな球体を置き、その鉛直上方、高さ L の支点Pと自然長 L のばねで結んだ。次に、図のように、この球体をばねの弾性力がフックの法則に従う範囲で、点Oを中心に等速円運動をさせた。このとき、OPとばねのなす角を θ とする。ばね定数を k とし、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えなさい。ただし、机上の摩擦、ばねの質量、空気抵抗、球体の大きさは無視できるものとする。考え方や計算の要点も記入しなさい。



問1　球体が机上を離れずに等速円運動しているとき、ばねの弾性力 F を m、k、g、L、θ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問2　問１における球体の速さ v と等速円運動の角速度 ω を m、k、g、L、θ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問3　球体の等速円運動の角速度がある限界値 ω_0 を超えていると、球体は机上を離れる。限界値 ω_0 を m、k、g、L のうち必要なものを用いて表しなさい。

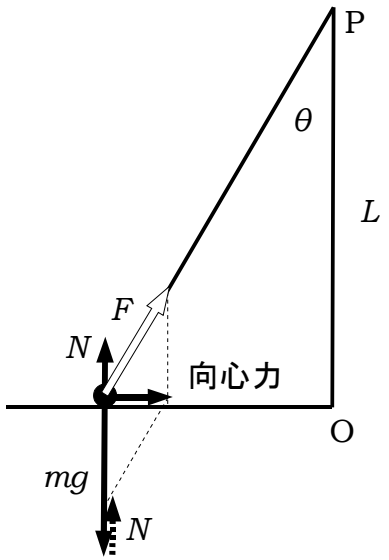
問4　フックの法則に従うばねの伸びの限界を x_m とする。この限界内に球体が机上を離れるために、ばね定数 k が満たす条件を m、g、L、x_m のうち必要なものを用いて表しなさい。

入試問題研究　第105回　2004年　筑波大学　①　力学（円運動）解答・解説

問1　ばねの伸びは $\dfrac{L}{\cos\theta}-L$ である。これより、フックの法則

$F=kx$ に代入して、ばねの弾性力を求めればよい。

ばねの力は $F=k\left(\dfrac{L}{\cos\theta}-L\right)=\dfrac{kL(1-\cos\theta)}{\cos\theta}$ である。



問2　球体が机上を離れずに等速円運動しているとき、ばねの弾性力、重力、垂直抗力、向心力は右図のような関係を持つ。

球体の速さ v と等速円運動の角速度 ω とすると、円運動の半径は $r=L\tan\theta$ である。また、右図より向心力は

$f=F\sin\theta=kL(1-\cos\theta)\tan\theta$ になる。

向心力の公式より $f=m\cdot L\tan\theta\,\omega^2=\dfrac{mv^2}{L\tan\theta}$ だから、

$m\cdot L\tan\theta\,\omega^2=\dfrac{mv^2}{L\tan\theta}=kL(1-\cos\theta)\tan\theta$ が成立する。

これより、球体の速度を求めると $v=L\tan\theta\cdot\sqrt{\dfrac{k(1-\cos\theta)}{m}}$ となる。また、球体の角速度は

$\omega=\sqrt{\dfrac{k(1-\cos\theta)}{m}}$ である。

問3　球体の等速円運動の角速度がある限界値 ω_0 を超えていると、球体は机上を離れる。机上から離れるとき、球体に働く机からの垂直抗力がゼロになる。これを用いればよい。そのときの球体の速さ v_0 と角速度 ω_0 とすると、円運動の半径は $r=L\tan\theta$ 、円運動の向心力は $f=mL\tan\theta\cdot\omega_0^2=\dfrac{mv_0^2}{L\tan\theta}$ になる。

机上から離れるのだから垂直抗力がゼロとすればよいので、図からは向心力の大きさが

$f=mg\tan\theta$ になる。これらより、球体の円運動の角速度は $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ 、また、球体の速度は $v_0=\sqrt{gL\tan^2\theta}$ である。

問4　フックの法則に従うばねの伸びの限界を x_m とする。この限界内に球体が机上を離れるためには、ばねの力が最大（ばねの伸びが x_m ）のときまでに浮き上がればよい。

よって、弾性限界内に浮き上がる条件は $kx_m\sin\theta>kx\sin\theta=mg\tan\theta$ であるので、これを整理して $kx_m\cos\theta>mg$ である。

また、図より、 $\cos\theta=\dfrac{L}{L+x_m}$ が成立するから、ばね定数の条件は $k>\dfrac{mg(L+x_m)}{x_mL}$ であればよいことになる。