入試問題研究 第106回　2004年 九州工業大学　① 力学

図1に示すような質量Mの台が水平な床の上に設置されている。この台は、一辺の長さ$2h$の立方体の右上隅が円筒によってくり抜かれた形をしており、中心C、半径h、中心角90°の円弧状斜面を有する。はじめに台の左下隅に置かれていた点をx軸の原点Oとし、床に沿って右向きに正とする。以下では、問題を図の平面に限定して考える。台の円弧状斜面の最上点Aから、質量mで大きさの無視できる小球を斜面に沿って静かに落下させる。小球と斜面の間には摩擦が働かないものとする。小球は斜面の最下点Bから水平に斜面を飛び出したのち、床上に落下した。重力加速度の大きさをgとして、以下の文章の空欄に当てはまる適当な数式を入れなさい。

図1

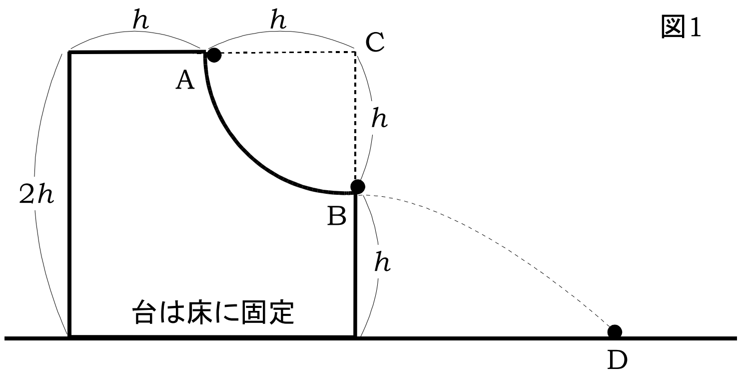
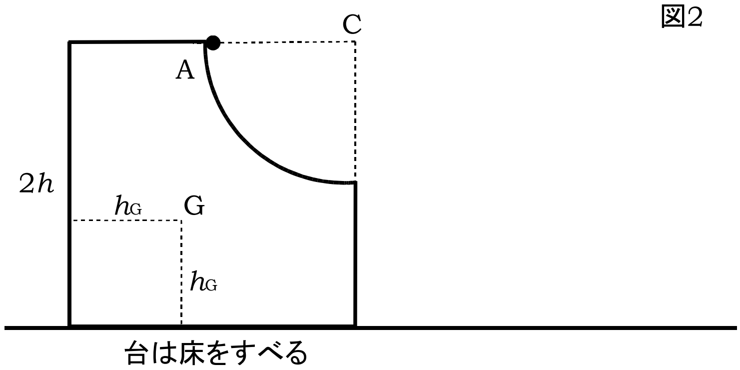


図2



［1］ 台は床に固定されているとする。

小球が斜面の最下点Bから斜面を飛び出すときの小球の速度のx方向成分は ① で与えられる。小球はB点から水平に斜面を飛び出した後、時間 ② 後にD点に落下する。小球が落下するまでに、B点からx軸正の方向に距離 ③ 進むので、D点のx座標は$2h$と ③ の和で与えられる。

［2］ 次に台が床に対して摩擦がなく自由に動ける場合を考える。ただし、台ははじめ静止しているものとする。なお、この台の重心Gは図2に示すように、台の左前および下面から距離 h_G の位置にある。

(a) 小球が斜面の最下点Bに達したとき、小球の速度のx方向成分を v_1、台の速度のx方向成分を v_2 とする。小球と台をあわせた系に対して、x軸方向に外から力が働かないので、この系のx方向の運動量は保存される。したがって、はじめ小球と台が静止していたことを考えれば、v_1 と v_2 の間に関係式 0 = ④ ･･･(1) が成立する。この系の力学的エネルギーも保存されるので、床を位置エネルギーの基準点とすると、v_1 と v_2 の間に関係式 $2mgh$ = ⑤ ･･･(2) が成立する。式(1)、(2) を解くことにより、小球がB点から斜面を飛び出すときの小球のx方向成分は ⑥ と求められる。

(b) 図2に示すように、小球が斜面上の任意の点Eに来たとき、小球のx座標を x_1、台の重心のx座標を x_2 とすると、小球と台をあわせた系の重心のx座標は $\dfrac{m x_1 + M x_2}{m+M}$ で与えられる。したがって、小球が斜面最上点Aにあるとき、小球と台をあわせた系の重心のx座標は ⑦ により与えられる。小球と台をあわせた系に対して、x軸方向に外からの力が働かないので、この系の重心のx座標は変化しない。したがって、x_1、x_2 の間に関係式 $\dfrac{m x_1 + M x_2}{m+M}$ = ⑦ ･･･(3) が成り立つ。また、小球がB点に達したとき、小球のx座標 x_1、重心のx座標 x_2 の間に関係式 $x_1 - x_2$ = ⑧ ･･･(4) が成り立つ。式(3)、(4) を解くことにより、小球が点Bに達したときの小球のx座標は ⑨ と求められる。

(c) 小球はB点から水平に斜面を飛び出したあと、時間 ② 後にF点に落下する。小球は落下するまでに、B点からx軸正の方向に距離 ⑩ 進む。したがって、F点のx座標は ⑨ と ⑩ の和で与えられる。

入試問題研究 第106回　2004年 九州工業大学　① 力学　解答･解説

［1］小球がAからBへ落下するとき、摩擦がないので力学的エネルギーは保存する。よって、

$mgh=\frac{1}{2}mv_B^2$　が成立する。よって、小球AがB点を通過する速度（の x 成分）は　$v_B=\sqrt{2gh}$　･･･①

になる。飛び出した後は水平投射運動になる。よって、落下するまでの時間を t とすると、　$h=\frac{1}{2}gt^2$　より、　$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$　･･･②　である。また、水平方向は等速運動だから、飛び出して着地するまでの距離は

$\sqrt{2gh}\times\sqrt{\frac{2h}{g}}=2h$　･･･③　である。

［2］水平方向に外力が働かない。よって、水平方向の運動量は保存する（運動量保存の法則）。

よって、　$0=mv_1+Mv_2$　･･･④　の関係式が成立する。また、摩擦がないので、力学的エネルギー保存の法則も成立する。よって、　$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2$　も成立する。分母を払って、

$2mgh=mv_1^2+Mv_2^2$　･･･⑤　の関係式が得られる。

④を⑤に代入して　v_2　を消去して　$2mgh=mv_1^2+\frac{m^2v_1^2}{M}$　になり、整理すると　$2Mgh=(M+m)v_1^2$　画成立する。よって、小球が飛び出す速度は　$v_1=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$　･･･⑥　である。

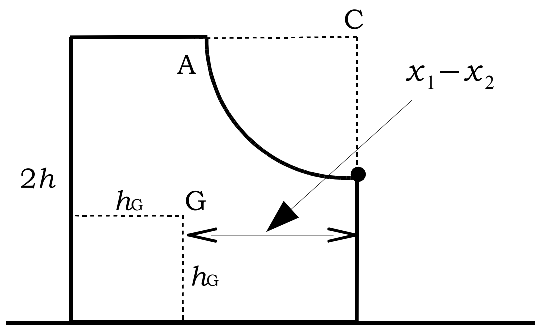
A 点に小球があるとき、系全体の重心の x 座標は

$\frac{mh+Mh_G}{m+M}$　･･･⑦　だから、　$\frac{mx_1+Mx_2}{m+M}=\frac{mh+Mh_G}{m+M}$

･･･⑦' が成立する。

B 点に小球が来たとき、　$x_1-x_2=2h-h_G$　･･･⑧　が明らか（右図）であるので　⑦' に⑧を代入して、　x_2　を消去すると、

$x_1=\frac{(2M+m)h}{M+m}$　･･･⑨　である。



台は床をすべる

また、小球が床に落下するまでの水平距離は　$v_1t=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}\times\sqrt{\frac{2h}{g}}=2h\sqrt{\frac{M}{M+m}}$　･･･⑩　になる。