

入試問題研究 第107回 2004年度 宮崎大学 ① 力学

物体の落下に関する次の文章の空欄に適切な語句、数値、式を入れなさい。

物体が静止の状態から、重力だけを受けて落下する運動を「自由落下」という。空気中を落下する物体は空気の抵抗を受けるから、その運動は厳密には「自由落下」とはいえない。

自由落下では物体の ① の大きさに関係なく同じ落下運動をする。このときの落下運動の加速度を重力加速度といい、 g で表す。

自由落下を始める点、すなわち手を離れた位置を原点として鉛直下向きに y 軸を取り、 t 秒後の位置の座標を y [m] とすると、自由落下は次の式 $v=gt$ 、 $y=\frac{1}{2}gt^2$ で表される。この両式から t を消去すると次の式 ② が得られ位置と距離の関係が導かれる。

例えば、 $g=9.8$ [m/s²] とすると $y=1000$ [m] の場合には、落下に要する時間は ③ [s]、落下したときの速度は ④ [m/s] である。

次に、空気の抵抗が無視できない場合について考える。例えば、雨滴が落下している場合には、雨滴の落下速度 v が大きくなると、落下速度の大きさに応じた空気抵抗を受ける。この抵抗は v が大きくなるにつれて大きさが増すので、やがて重力と空気抵抗はつりあい、雨滴の速度は一定になる。

雨滴が小さい(半径 r が 1.0×10^{-5} [m] 以下)ときには、空気抵抗は雨滴の半径 r と落下速度 v [m/s] との積に比例する。その比例定数を k_s とし、雨滴の質量を m [kg]、雨滴の下向きの加速度を a [m/s²] とすると、運動方程式は ⑤ になる。この式から v が大きくなるにつれて、下向きの加速度が小さくなり、 ⑥ =0 になると、加速度がゼロになるから、等速運動になり、一定速度 v_s で落下するようになる。この速度 v_s を終端速度というが、これは前の式から次の $v_s =$ ⑦ ように表すことができる。

ここで、雨滴の質量 m は半径 r の球と考え、水の密度を ρ [kg/m³] とすると $m =$ ⑧ で表せる。終端速度 v_s は r の関数として表され、雨滴の半径 r の ⑨ に比例するということがわかる。

一方、雨滴が大きい(半径 r が 2.0×10^{-4} [m] 以上)ときには、空気抵抗は雨滴の断面積 πr^2 [m²] と落下速度 v [m/s] の2乗との積に比例するようになる。比例定数を k_L とすると、このときの運動方程式は ⑩ である。したがって、この式から v が大きくなるにつれて、下向きの加速度が小さくなり、ついにゼロとなる。終端速度 v_L [m/s] は ⑪ と表すことができる。この結果に ⑧ を考慮すると、雨滴が大きいときには終端速度 v_L は雨滴の半径 r の ⑫ に比例するようになることがわかる。

以上のことから、空気の抵抗が無視できる場合と無視できない場合で落下の状況が大きく異なる。空気抵抗が無視できない場合、雨滴の大きさ(半径 r)によっても空気抵抗の表れ方が異なることがわかる。

入試問題研究 第107回 2004年度 宮崎大学 ① 力学 解答・解説

空気抵抗がないときは誰でも解ける基本中の基本問題。よって、勝負は⑤から後になる。

■空気抵抗が無視できる場合

自由落下のとき、物体の質量・・・① には関係なく落下の加速度が重力加速度 g になる。投下速度運動の公式に代入した $v=gt$ 、 $y=\frac{1}{2}gt^2$ から時間 t を消去すると、 $v^2=2gy$ ・・・② の位置と速度の関係式が得られる。

$y=\frac{1}{2}gt^2$ に $g=9.8$ 、 $y=1000$ を代入して、 $t=\sqrt{\frac{1000}{4.9}}=\frac{100}{7}=14.2\ldots$ より、落下時間は $14\cdots$ ③ [s] 後である。落下したときの速度は、 $v^2=2gy$ に代入して求めると、 $140\cdots$ ④ [m/s] になる。ここまでは簡単すぎる！ 出来て当然の問題でしかない。

■空気抵抗が無視できない場合

空気抵抗がある場合は少し複雑になり、雨滴の大きさにより空気抵抗が異なってくる。

★ 雨滴が小さい(半径 r が 1.0×10^{-5} [m] 以下)とき

空気抵抗は $k_s r v$ [N]、重力が mg [N] だから、運動方程式は $ma=mg-k_s r v$ ・・・⑤ となる。右辺 $mg-k_s r v$ ・・・⑥ がゼロになるとき、加速度がゼロ(等速運動)になる。そのときの速度(終端速度)を v_s とすると、 $mg-k_s r v_s=0$ だから $v_s=\frac{mg}{k_s r}$ ・・・

⑦ になる。ここで、雨滴の質量は $m=\frac{4}{3}\rho\pi r^3$ ・・・⑧ である。よって、⑦に代入して

$v_s=\frac{4\rho\pi r^2 g}{3k_s}$ になるから、半径の 2 乗・・・⑨ に比例する。

★ 雨滴が大きい(半径 r が 2.0×10^{-4} [m] 以上)とき

空気抵抗が $k_L \pi r^2 v^2$ となり、運動方程式は $ma=mg-k_L \pi r^2 v^2$ ・・・⑩ になる。

加速度がゼロになるとき、 $0=mg-k_L \pi r^2 v_L^2$ より、終端速度は $v_L=\sqrt{\frac{mg}{\pi k_L r^2}}$ ・・・⑪

である。⑧を代入して、 $v_L=\sqrt{\frac{4\rho r g}{3k_L}}$ になるから、半径の $\frac{1}{2}$ 乗・・・⑫ に比例していることになる。

以上の計算の結果から、雨滴の落下速度は雨滴が小さいときは速度差が大きくなる。したがって、霧雨のような小さな雨滴の場合は非常にゆっくり降ってくる雨になる。しかし、ある程度の大きさ以上になると、雨滴が大きくても小さくても速度の差はそれほど違いが出てこないことになる。