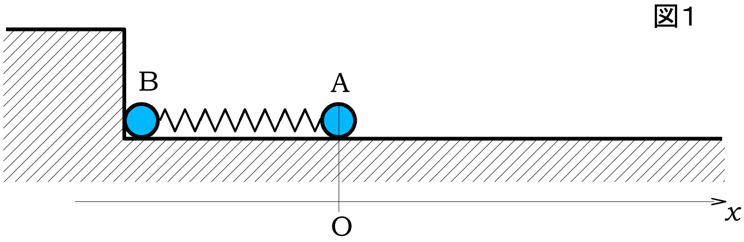
入試問題研究 第109回　2003年度 東北大学　後① 力学(単振動応用)

図Ⅰのように、垂直な壁に摩擦のない水平面が接しており、その上に質量 m_A と m_B の小球AとBが置かれている。AとBはばね(ばね定数 k 、自然長 l_0)で連結されており、壁に垂直な x 軸上を動く。

図1



はじめ、Aは $x=0$ の位置に、Bは壁に接して置かれ、ばねの長さは自然長であった。この状態から、図1のようにAを距離 d だけ手で押してばねを縮め、静止させた後、静かに手を離した。

手を離した後、Aが初めて $x=0$ の位置を通過した時刻($t=0$ とする)におけるAの速さは v_0 であった。その後、AとBの重心は速さ v_G の等速運動を行った。さらに、ばねの長さの時間変化を測定したところ、時刻 $t=t_1$ に初めてばねの長さが最大になった。

壁は変形しないものとし、AとBの大きさとばねの質量は無視できるものとして、以下の問いに答えなさい。 ただし、結果だけでなく、考え方や計算の過程も書きなさい。

(1) 時刻 $t=0$ に小球Bは壁から離れて動き出した。その理由を書きなさい。

(2) 小球Aから手を離した後、小球Bが動き出すまでに要した時間 T を、 m_A 、 k を使って示しなさい。

(3) v_0 を m_A 、 k 、 d を使って示しなさい。

(4) 時刻 t のおける小球Aの位置 x_A を表す概略のグラフを描きなさい。

(5) ばねの長さの最大値 l_1 を m_A 、 m_B 、 d 、 l_0 を使って示しなさい。

［ヒント］

文中に書かれている「重心が等速運動になる」と、「重心から見ると小球A、Bがそれぞれ単振動になる」をうまく使うとよい。なお、文中の仮定(重心は等速運動を行う)は、水平方向には外力が働かないことから出てくる限定である。

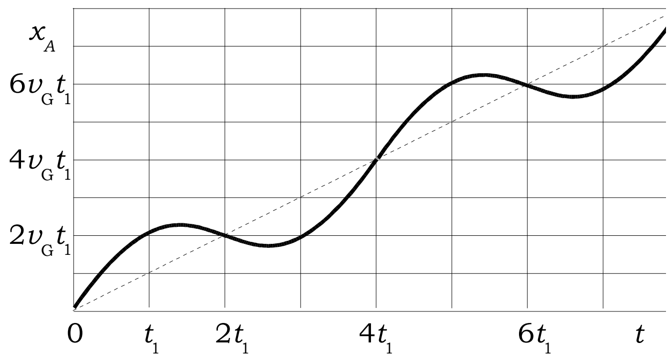
入試問題研究 第109回 2003年度 東北大学 後① 力学(単振動応用) 解答・解説

(1) 時刻 $t=0$ にばねの長さが自然長になる。したがて、ばねの力はゼロ。その後、小球Aが右に移動すると、ばねが伸び始める。ばねが伸びると小球Bは右向きの力を受けるので、小球Bは壁から離れて動き出す。

(2) 小球Aから手を離した後、小球Aの位置が x (<0)のとき、小球Aの運動方程式は $m_A a=-kx$ だから、小球Aの加速度は $a=-\dfrac{k}{m_A}\cdot x$ である。公式 $a=-\omega^2\cdot x$ と比較して、 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$ である。よって、小球Aの運動の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m_A}{k}}$ になる。よって、小球Aが $x=0$ に戻るまで(Bが動き出すまで)に要した時間 T は $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m_A}{k}}$ である。

(3) $x=-d$ のときの速度0だから、力学的エネルギー保存の法則より $\dfrac{1}{2}kd^2=\dfrac{1}{2}m_A v_0^2$ が成立する。よって、 $x=0$ を通過するときの速度 v_0 は $d\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$ である。

(4) 小球Bが壁から離れて小球A、Bともに動き出す。重心が等速運動(問題文中に明記)しながら、両物体は重心からみて単振動している。この単振動は、ばねの自然長のときが単振動の中心(つりあいの位置)になっており、時刻 $t=0$ のとき小球Aが単振動の中心を正向きに動いている。また $t=t_1$ のとき、ばねの伸びが最大になるから、この単振動の周期は $4t_1$ である。以上より、右図が小球Aの運動の概略グラフである。



※この運動の完全解(問題文中のように仮定しないでの完全解)は、「物理の小道」番外編「ハイレベル物理学」にアップしていますのでご参照ください。

(5) ばねの長さの最大値 l_1 を m_A 、 m_B 、 d 、 l_0 を使って示しなさい。
運動量保存の法則、力学的エネルギー保存の法則を使えばよい。
ばねの伸びの最大を x とする。時刻ゼロのときとばねの伸びが最大のときについて考える。

$m_A v_0+m_B\cdot 0=m_A v_A+m_B v_B$ 、 $\dfrac{1}{2}m_A v_0^2+0=\dfrac{1}{2}m_A v_A^2+\dfrac{1}{2}m_B v_B^2+\dfrac{1}{2}kx^2$ の両関係式が成立する。 v_B を消去して $kx^2=m_A v_0^2-m_A v_A^2-m_B\left\{\dfrac{m_A(v_0-v_A)}{m_B}\right\}^2$ だから、

$kx^2=-\dfrac{m_A\{m_A v_0^2-m_B v_0^2-2m_A v_0 v_A+(m_A+m_B)v_A^2\}}{m_B}$ になる。よって $v_A=\dfrac{m_A}{m_A+m_B}$ のとき、右辺は最大値 $-\dfrac{m_A(m_A-m_B)v_0^2}{m_B}+\dfrac{m_A^3 v_0^2}{m_B(m_A+m_B)}=\dfrac{m_A m_B v_0^2}{m_A+m_B}$ をとる。

よって、最大のばねの伸びは $x=v_0\cdot\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{k(m_A+m_B)}}$ になる。よって $x=d\cdot\sqrt{\dfrac{m_B}{m_A+m_B}}$ だから、ばねの最大の長さは $l_1=l_0+d\cdot\sqrt{\dfrac{m_B}{m_A+m_B}}$ である。

※ 運動方程式のみを使った完全解が、「物理の小道」番外編「ハイレベル物理学」にあります。