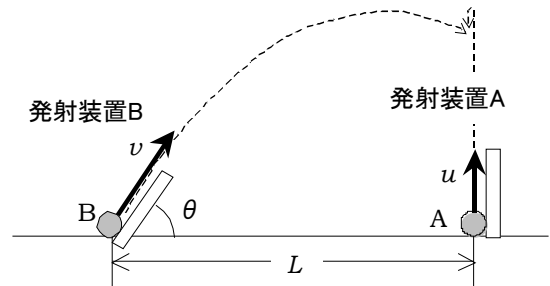


入試問題研究 落下運動（等加速度運動）応用 （学習院大学 95 年 より改作）

右の図のように質量 m_1 [m] の物体 A と質量 m_2 [m] の物体 B と、この物体 A、B を速度で u [m/s]、 v [m/s]（ただし、 $v > u$ ）で飛ばすことができる発射装置 A、B がある。重力加速度を g [m/s²] とし、次の各問いに答えなさい。



最初、物体 A を発射する発射装置 A の角度を鉛直真上（発射角度 90 度）に打ち上げ速度 u [m/s] で発射した。このとき、物体 A は最高点（①）[m] まで上昇することができる。

発射装置 A、B を距離 L [m] 離して置いた。物体 A、B を同時に発射するとき、空中で物体 A、B が衝突するように発射装置 B の角度 θ を調整した。衝突した時刻が発射後 t [s] であったとすると、衝突するとき、物体 A の位置は（②）[m]、物体 B の位置は（③）[m] と表せる。したがって、両物体が衝突するためには、発射装置 B の角度 θ は u 、 v を使って表すとき（④）…(1) の関係を満たす。また、衝突するまでに物体 B は右へ L [m] 移動するので、（⑤）…(2) の条件が成立する。このとき、衝突する位置は空中であるので、衝突するまでの時間 t を物体 B の打ち上げ速度 v で表すと（⑥）の関係が成立する。

問1 上の文章の空欄に適切な数式、関係式を入れなさい。

問2 物体 A から物体 B を見るとき、打ち上げから衝突するまでの間、物体 B はどのように動いているように見えるか、説明しなさい。

問3 衝突するための物体 B の速度 v の範囲を u 、 v 、 L を使って求めなさい。

物体 A、B が衝突する設定で実験が行ったが、実際には物体 A の発射時刻が物体 B の発射時刻よりわずかに遅れることがわかった。

問4 物体 B の発射速度を変えて調節する場合はどのように変えてやればよいか、説明しなさい。

問5 物体 B の発射初速度を変えて調節する場合はどのように変えてやればよいか、説明しなさい。

入試問題研究 落下運動（等加速度運動）応用（学習院大学95年より改作） 解答・解説

☆ 水平方向と鉛直方向のそれぞれの方向に分けて考える。

☆ 鉛直方向は下向きに重力加速度 g の等加速度運動に、水平方向は等速運動になる。

☆ 等加速度運動の公式 $v = v_0 + at$ 、 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 、 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ の3つだけだ！

問1 1、物体 A の初速度は u [m/s] であり、最高点での速度ゼロである。最高点の高さを h_0 [m] とすると、

等加速度運動の公式より、 $0^2 - u^2 = -2gh_0$ だから、高さ $h_0 = \frac{u^2}{2g}$ [m] まで上昇することができる。

2、3、4、物体 A、B 同時に発射したとき、衝突の高さを h 、衝突時間を t とすると、等加速度運動の公

式より、衝突するときの位置は、物体 A が $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ [m]、物体 B が $h = v \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ [m] だか

ら、辺々引き算して整理すると、 $u = v \sin \theta \cdots (1)$ の関係を満たす。

5、6、衝突するまでに物体 B は右へ等速で L [m] 移動するので、 $L = v \cos \theta \cdot t \cdots (2)$ の条件が成立

する。また、衝突する高さは空中だから、 $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 > 0$ であるので、衝突するまでの時間 t は、

$0 < t < \frac{2u}{g}$ の関係を満たす。

問2 t 秒のときの速度は、物体 A が $\vec{v}_A = (0, u - gt)$ 、物体 B が $\vec{v}_B = (v \cos \theta, v \sin \theta - gt)$ であるので、物

体 A から見た物体 B の相対速度は $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ だから、 $\vec{v}_B - \vec{v}_A = (v \cos \theta, 0)$ である。したがって、打ち上げから衝突するまでの間、物体 B は速さ $v \cos \theta$ で水平に飛んでくるように見える。

問3 衝突するための物体 B の打ち上げ角度 θ の関係式 $u = v \sin \theta$ と、水平方向の移動距離の式

$L = v \cos \theta \cdot t$ と、衝突するまでの時間制限 $0 < t < \frac{2u}{g}$ を使って求めればよい。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代

入して $\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{L}{vt}\right)^2 = 1$ だから、 $t = \sqrt{\frac{L^2}{v^2 - u^2}}$ だから、 $\sqrt{\frac{L^2}{v^2 - u^2}} < \frac{2u}{g}$ を満たす。物体 B の発射速度

は $v > \sqrt{u^2 + \frac{g^2 L^2}{4u^2}}$ を満たす必要がある。よって、物体 B の速度 v の範囲は $v > \sqrt{u^2 + \frac{g^2 L^2}{4u^2}}$ である。

問4 物体 B の速度の水平方向成分 $v' \cos \theta'$ だから、衝突するためには $L = v' \cos \theta' \cdot t'$ が成立すればよい。

衝突までの時間 t' が想定時間 $t = \frac{L}{v \cos \theta}$ より短くなるので、したがって、 $\frac{L}{v \cos \theta} > \frac{L}{v' \cos \theta'}$ だから、

$v' \cos \theta' > v \cos \theta$ であるので、打ち上げ角度をそのままであるとすれば、 $v' > v$ だから、打ち上げ速度 v' をはじめの速度 v よりわずかに速くしてやればよいことがわかる。

問5 問4と同様考えて、 $v' \cos \theta' > v \cos \theta$ であるので、打ち上げ速度がそのままであるとすれば、

$\cos \theta' > \cos \theta$ だから、打ち上げ角度 θ' をはじめの角度 θ よりわずかに小さくしてやればよいことがわかる。