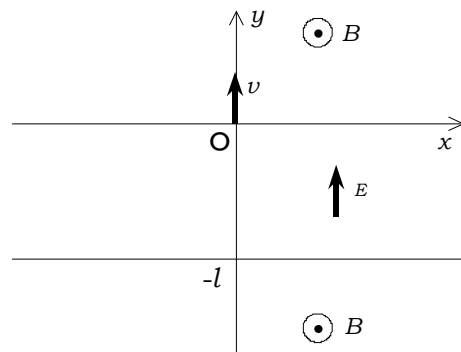


入試問題研究 第113回 1996年 東京大学 前期 ② 電磁気(ローレンツ力)

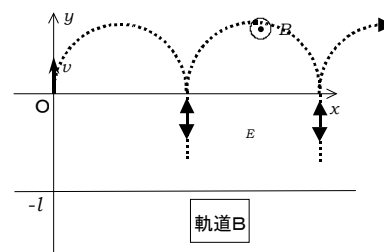
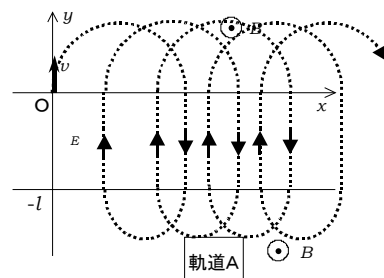
磁界および電界の影響を受け、 xy 平面を運動する電荷を持った粒子(荷電粒子)を考える。図のように、領域 $y > 0$ と $y < -1$ では磁束密度 B の一様な磁界が xy 平面に垂直(紙面裏から表の向きに)かかっており、 $-l < y < 0$ の領域では一様な電界 E が y 軸正の方向にかかっている。 xy 平面内で原点から y 軸正の方向に速さ v ($v > 0$) で荷電粒子が打ち出される。荷電粒子の質量を m 、電荷を q ($q > 0$) とし、重力の影響は無視して良い。以下では MKSA 単位系を用いる。



- 1 荷電粒子が最初に x 軸を通過するまでの時間を求めなさい。
- 2 荷電粒子が最初に x 軸を通過する点と原点との距離を求めなさい。
- 3 荷電粒子の運動は初速度の大きさ v によって 2 種類の軌道をとる。この 2 種類の軌道の概形を示しなさい。
- 4 3 における 2 種類の軌道を分ける初速度の大きさ v_0 を求めなさい。
- 5 3 の 2 種類の軌道それぞれについて、荷電粒子が最初に x 軸を通過してから 2 度目に x 軸を通過するまでの時間を求めなさい。
- 6 3 の 2 種類の軌道それぞれについて、 x 軸方向の平均速度を求めなさい。

入試問題研究 第113回 1996年 東京大学 前期 ② 電磁気(ローレンツ力) 解答・解説

- 1 荷電粒子は磁界中を運動するとき、ローレンツ力 $f=qvB$ を受ける。そのため半径 r の円運動となる。このとき、ローレンツ力が向心力となるので $qvB=m\frac{v^2}{r}$ である。したがって、 $r=\frac{mv}{qB}$ であり、半周して磁界のある



領域から出る。円運動の周期は $T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$ であるので、 x 軸を

通過する時間(=半周する時間)は $t_1=\frac{T}{2}=\frac{\pi m}{qB}$...① である。

- 2 最初に x 軸を通過する位置は 直径だけ離れたところになるので、原点からの距離が $2r=\frac{2mv}{qB}$...② である。

- 3 電界の領域に入った後、電界からの力に逆らって領域 ($y < -l$) に入れる「軌道 A」と、電界の領域を通過できない「軌道 B」の2つが考えられる。(右図参照)

- 4 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が電界に逆らって通り抜けるための仕事 qEl

以上か否かである。境界となる速度を v_0 とすると $\frac{1}{2}mv_0^2=qEl$ だから $v_0=\sqrt{\frac{2qEl}{m}}$...③ になる。

- 5 磁界中を円運動する周期は $T=\frac{2\pi m}{qB}$ である。軌道 A、B どちらの場合も、 x 軸を一度目に通過する時

刻は、磁界中を半周する時間だから、どちらも $t_1=\frac{\pi m}{qB}$...④ である。

$0 > y > -l$ では、運動方程式が $ma=qE$ より加速度 $a=\frac{qE}{m}$ 、初速度 $-v$ の等加速度運動だ。

- (1) 軌道 A の場合、初速度 $-v$ で、 $0 > y > -l$ を通過する。通過直後の速度は等加速度運動だから $v_1^2 - v^2 = 2 \cdot \frac{qE}{m} \cdot (-l)$ より $v_1 = -\sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}}$ である。 $v_1 = -v + \frac{qE}{m}t$ より

$$t = \left(v - \sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}} \right) \div \left(\frac{qE}{m} \right) \text{ になり、電界領域の通過時間は } t = \frac{2l}{v + \sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}}} \text{ ...⑤ である。}$$

$y < -l$ では円運動(半周)するから、電子の速度に係わらず最初の半周の時間と同じ $t_1 = \frac{\pi m}{qB}$ だ。

再び $0 > y > -l$ を通過する時間も同様だ。1サイクルの時間は $T_A = \frac{4l}{v + \sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}}} + \frac{2\pi m}{qB}$...⑥ だ。

- (2) 軌道 B の場合、 $0 = -vt + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$ より $t = \frac{2mv}{qE}$ だから $T_B = \frac{2mv}{qE} + \frac{\pi m}{qB} = \frac{m(2vB + \pi E)}{qBE}$ だ。

- 6 軌道 A では $\Delta x_A = \frac{2m(v - |v_1|)}{qB}$ より $\Delta x_A = \frac{4El}{\left(v + \sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}} \right) B}$ だから、速度は $v_A = \frac{\Delta x_A}{T_A}$ である。

軌道 A の x 軸方向の平均速度は $v_A = \frac{2Elq}{2Blq + \pi m \left(v + \sqrt{v^2 - \frac{2qEl}{m}} \right)}$ である。

軌道 B の x 軸方向の平均速度は $v_B = \frac{\Delta x_B}{T_B} = \frac{2mv}{qB} \div \frac{m(2vB + \pi E)}{qBE} = \frac{2Ev}{2vB + \pi E}$ である。