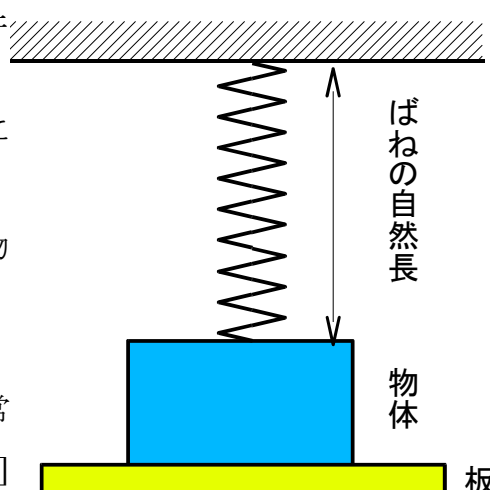


入試問題研究 第116回 2002年 鹿児島大学 ② 力学(単振動)

右図のように、ばね定数 k [N/m] のばねの一端を天井に固定し、もう一方の端に質量 m [kg] の物体を固定し、ばねの長さが自然長 x_0 [m] になるように、板を水平に保って物体を支えている。

重力加速度を g [m/s²] としばねの質労、板の質量、物体と板の摩擦力、空気の抵抗などは無視できるものとして、以下の問いに答えなさい。



- (1) 板を水平に保ったまま、物体と板が離れないように非常にゆっくりと板を下げてゆく途中、ばねの長さが x [m] になったとき、板が物体を支えている力の大きさを求めなさい。
- (2) (1) において、板と物体が離れる瞬間のばねの長さを求めなさい。
- (3) 板を水平に保ったまま、ばねの長さが自然長になるように板で物体を支えているときに、急に板を取り去った。その後、物体が最も下がったときのばねの長さを求めなさい。
- (4) (3) において、急に板を取り去った後、物体が最も下がった位置にくるまでの間の、物体の速さの最大値を求めなさい。
- (5) ばねの長さが自然長であったときから、板を水平に保ったまま、非常にゆっくりと板を下げていき物体が板から離れるまでの間に、物体が板に対してした仕事の量を求めなさい。

入試問題研究 第116回 2002年 鹿児島大学 ② 力学(単振動) 解答・解説

- (1) 板を水平に保ったまま、物体と板が離れないように非常にゆっくりと板を下げてゆく途中、ばねの長さが x [m] になったときに、物体に働く力を考えればよい。

ばねの力は $f=k(x-x_0)$ で上向き、重力は mg で下向き、板からの垂直抗力(板が物体を支える力)が上向きに N の3力が物体に働く力である。これらが釣りあうのだから $k(x-x_0)-mg+N=0$ が成立する。よって、 $N=mg-k(x-x_0)$ ……① である。板が物体を支えている力の大きさは $mg-k(x-x_0)$ である。

- (2) (1)において、板と物体が離れる瞬間は、板からの垂直抗力 N がゼロになるから、①より、 $0=mg-k(x-x_0)$ が成立する。よって、ばねの長さは $x=x_0+\frac{mg}{k}$ のときである。

- (3) 板を水平に保ったまま、ばねの長さが自然長になるように板で物体を支えているときに、急に板を取り去った。手を離れた位置を重力による位置エネルギーゼロの基準点とする。

最初は、重力による位置エネルギー、運動エネルギー、ばねの弾性力による位置エネルギーともにゼロである。

物体が最も下がったとき、ばねの長さを x 、速度を v とする。このとき、重力による位置エネルギーは $-mg(x-x_0)$ 、ばねの弾性力による位置エネルギーは $\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ 、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ である。

力学的エネルギー保存の法則より $0=-mg(x-x_0)+\frac{1}{2}k(x-x_0)^2+\frac{1}{2}mv^2$ ……② が成立する。物体が最も下がった位置では、物体の速度がゼロだから、②に代入して整理した

$$0=(x-x_0)\left\{k(x-x_0)-2mg\right\} \text{ が成立する。よって } x=x_0+\frac{2mg}{k} \text{ であるから、最もばね}$$

が伸びたときのばねの長さは $x=x_0+\frac{2mg}{k}$ である。(よって、単振動の振幅は $\frac{mg}{k}$)

- (4) ②より、 $v=\sqrt{2g(x-x_0)-\frac{k(x-x_0)^2}{m}}$ だから、 $v=\sqrt{-\frac{k}{m}\left\{(x-x_0)-\frac{mg}{k}\right\}^2+\frac{mg^2}{k}}$ であ

る。よって、 $x-x_0=\frac{mg}{k}$ のとき、物体の速度は最大となり、その速度は $v=g\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

(この単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 、振幅は $\frac{mg}{k}$ より、物体の最大速度(中心での速度)

は $v=A\omega$ から $v=A\omega=\frac{mg}{k}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=g\sqrt{\frac{m}{k}}$ としてもよい)

- (5) 物体の運動エネルギーは常にゼロだから、物体に加わる仕事はゼロである。重力が物体にした仕事を $mg\left(\frac{mg}{k}\right)$ 、物体がばねにした仕事は $\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$ 、物体が板にした仕事を

W (これが答え)だから、 $mg\left(\frac{mg}{k}\right)-\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2-W=0$ が成立する。

$W=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$ であるので、ばねの長さが自然長から物体が板から離れるまでの間に、

物体が板に対してした仕事の量は $W=\frac{m^2g^2}{2k}$ である。