

# 入試問題研究 第117回 2002年 千葉大学 ① 力学(フックの法則)

図1または図2に示されるように、自然の長さが同じで、ばね定数  $k_A$ 、 $k_B$  のばね A、B を組み合わせて直列または並列につなぎ、質量  $m$  の物体 P をつるした。以下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを  $g$  とし、ばねの質量を無視できるものとする。

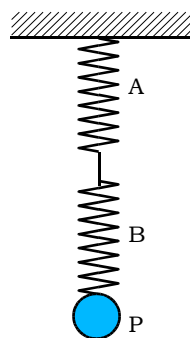


図1

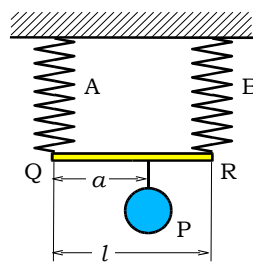


図2

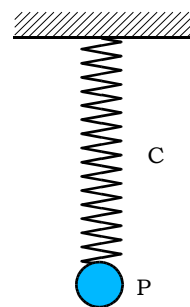


図3

問1 図1のように、直列につながれた2本のばね A、B は、図3のような1本のばね C とみなすことができる。このときのばね C のばね定数  $k_C$  を  $k_A$ 、 $k_B$  で表してみよう。次の文章の空欄に適当な式で埋めなさい。

物体 P を静かにつるしたとき、ばね A、B はそれぞれ  $x_A$ 、 $x_B$  だけ伸び、全体で  $x_1 = x_A + x_B$  伸びた。フックの法則より、ばね A、B における重力と伸び  $x_A$ 、 $x_B$  の関係は、それぞれ  $x_A = \boxed{\text{①}}$ 、 $x_B = \boxed{\text{②}}$  となる。同様にフックの法則より、ばね C における重力と伸び  $x_1$  の関係は  $x_1 = \boxed{\text{③}}$  となる。したがって、ばね C のばね定数  $k_C$  は  $k_A$ 、 $k_B$  を用いて  $k_C = \boxed{\text{④}}$  と表される。

問2 図2のように、ばね A、B の下端に質量を無視できる長さ  $l$  の棒 QR を取り付け、ばね A、B を並列につないだ。そして、棒の左端の点 Q から長さ  $a$  の位置に物体 P を静かに取り付けたところ、ばね A、B は同じ長さ  $x_2$  だけ伸びた。

- (1) 伸びた長さ  $x_2$  を  $g$ 、 $m$ 、 $k_A$ 、 $k_B$  を用いて表しなさい。
- (2) 棒の左端 Q のまわりの力のモーメントのつりあいの式を  $g$ 、 $a$ 、 $l$ 、 $m$ 、 $k_B$ 、 $x_2$  を用いて表しなさい。
- (3) ばね A と B のばね定数の比  $k_A : k_B$  を  $a$ 、 $l$  を用いて表しなさい。
- (4) ばねが自然の長さになるように物体 P を手で支えて、急に手を離した。棒 QR はつねに水平で、物体 P と一体となって鉛直方向のみに運動する。このときの振動の振幅  $X$  と周期  $T$  を  $g$ 、 $m$ 、 $k_A$ 、 $k_B$  を用いて表しなさい。

# 入試問題研究 第117回 2002年 千葉大学 ① 力学(フックの法則) 解答・解説

図1または図2に示されるように、自然の長さが同じで、

ばね定数  $k_A$ 、 $k_B$  のばね A、B を組み合わせて直列または並列につなぎ、質量  $m$  の物体 P をつるした。以下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを  $g$  とし、ばねの質量を無視できるものとする。

問1 物体 P を静かにつるしたとき、ば

ね A、B はそれぞれ  $x_A$ 、 $x_B$  だけ、

全体で  $x_1 = x_A + x_B$  伸びた。フックの法則より、ばね A、B それぞれ  $mg = k_A x_A$ 、

$mg = k_B x_B$  が成立する。よって、それぞれ  $x_A = \frac{mg}{k_A} \dots \textcircled{1}$ 、 $x_B = \frac{mg}{k_B} \dots \textcircled{2}$  となる。同様

に、ばね C における重力と伸び  $x_1$  の関係は  $x_1 = \frac{mg}{k_C} \dots \textcircled{3}$  となる。 $x_1 = x_A + x_B$  に代入し

て整理すると  $\frac{1}{k_C} = \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}$  だから、ばね C のばね定数  $k_C$  は  $k_C = \frac{k_A k_B}{k_A + k_B} \dots \textcircled{4}$  と表

される。

問2 図2のように、ばね A、B の下端に質量を無視できる長さ  $l$  の棒 QR を取り付け、ばね A、B を並列につないだ。そして、棒の左端の点 Q から長さ  $a$  の位置に物体 P を静かに取り付けたところ、ばね A、B は同じ長さ  $x_2$  だけ伸びた。

(1) ばねの伸びを  $x_2$  とすると、ばねの力は、A が  $f_A = k_A x_2$ 、B が  $f_B = k_B x_2$  である。

この2つの力で物体を引き上げているので  $mg = f_A + f_B$  が成立する。

これより  $x_2 = \frac{mg}{k_A + k_B}$  だから、このときのばねの伸びは  $\frac{mg}{k_A + k_B}$  である。

(2) 棒の左端 Q のまわりの力のモーメントのつりあいの式は  $k_B x_2 \cdot l - m g a = 0$  である。

(3) (1) の結果を代入して  $k_B \cdot \frac{mg}{k_A + k_B} \cdot l - m g a = 0$  だから  $\frac{k_B l}{k_A + k_B} - a = 0$  である。

これを整理すると  $\frac{k_A}{k_B} = \frac{l}{a} - 1$  になる。

よって、ばね A と B のばね定数の比は  $k_A : k_B = l - a : a$  である。

(4) (1) より並列接続のばねの合成ばね定数  $k_P$  は  $mg = k_P \cdot \frac{mg}{k_A + k_B}$  より  $k_P = k_A + k_B$

だから、このばねの単振動の周期の公式  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  より、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_A + k_B}}$ 、また、振幅

はつりあう位置(単振動の中心)から速度ゼロの位置(端)の距離だから  $X = \frac{mg}{k_A + k_B}$  である。

