

入試問題研究 第119回 2002年 岩手大学 ⑤ ボーアの理論

以下の文章を読み空欄に適切な式または数字を入れなさい。クーロンの法則の比例定数を k [Nm^2/C^2]、プランク定数を h [Js]、光の速さを c [m/s] とする。

水素原子(原子番号1)は、通常正の電荷を持つ陽子1個からなる原子核(電荷 $+e$ [C])と負電荷を持つ電子(質量 m [kg]、電荷 $-e$ [C])1個で構成されている。電子は、原子核と電子の間に働くクーロン力により、静止した原子核を中心とする等速円運動しているとして、水素原子の構造を考えてみよう。

電子が運動量の大きさ p [kgm/s]、半径 r [m] の円運動するとき、クーロン力が向心力の働きをするから $k \frac{e^2}{r^2} = \boxed{\text{ア}} \cdots \text{①}$ という関係式が成立する。この電子の運動エネルギーは p を用いて $\boxed{\text{イ}}$ と表される。また、無限遠をクーロンの力の位置エネルギーの基準点(位置エネルギーゼロの点)にとると、電子の力学的エネルギー E [J] は $E = \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \cdots \text{②}$ である。

電子は粒子としての性質だけでなく、波としての性格も持つ。電子が波動として振舞うときの波を電子波という。電子の運動量が p [kgm/s] のとき、電子波の波長は $\frac{h}{p}$ [m] である。電子の軌道の円周の長さが電子波の波長の整数倍のときだけ電子波は定常波となり、電子は定常状態を保って、軌道運動を続けることができる。このとき、 $\frac{2\pi r p}{h} = n$ ($n=1,2,3,4,\dots$) $\cdots \text{③}$ という関係式が成立している。この整数 n を量子数という。①、③から p を消去して、電子の軌道半径 r を求めると、 $r = \boxed{\text{エ}} \cdots \text{④}$ と表される。①、②から p を消去し、④を用いて r を置き換えると、エネルギー E は、 $E = \boxed{\text{オ}} \cdots \text{⑤}$ と表される。電子はこのような飛び飛びの軌道半径、エネルギーの値をとる。 $n=1$ のときの軌道半径を「ボーア半径」と呼ばれている。

原子内の電子が異なるエネルギー準位の状態間を遷移するとき、決まった波長の電磁波を放出したり、吸収したりする。高いエネルギー準位の状態から基底状態へ遷移するとき、水素原子から放出される電磁波の波長のうち、最も長いものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

ヘリウム原子(原子番号2)が電子を1個失った状態にあるヘリウムイオンは、ヘリウム原子核とそのまわりをまわる1個の電子で構成されている。水素原子の場合と同様に考えると、基底状態にあるヘリウムイオンの電子は軌道半径は、ボーア半径の $\boxed{\text{キ}}$ 倍になることが分かる。この電子を、電磁波を当てて原子核から無限遠まで引き離すために必要な電磁波の波長の最大値は、基底状態にある水素原子の場合の $\boxed{\text{ク}}$ 倍である。

入試問題研究 第119回 2002年 岩手大学 ⑤ ボーアの理論 解答・解説

水素原子(原子番号1)は、通常正の電荷を持つ陽子1個からなる原子核(電荷 $+e$ [C])と負電荷を持つ電子(質量 m [kg]、電荷 $-e$ [C])1個で構成されている。電子は、原子核と電子の間に働くクーロン力により、静止した原子核を中心とする等速円運動しているとして、水素原子の構造を考えてみよう。

電子が運動量の大きさ p [kg m/s]、半径 r [m] の円運動するとき、運動量は $p=mv$ である。また、クーロン力が向心力の働きをするから $k \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{p^2}{mr} \dots \text{ア} \dots \text{①}$ が成立する。

電子の運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \dots \text{イ} \dots$ と表され、無限遠をクーロンの力の位置エネルギーの基準点(位置エネルギーゼロの点)とするとクーロン力による位置エネルギーは $U = -k \cdot \frac{e^2}{r}$ より、電子の力学的エネルギー E は $E = K + U \dots \text{②}$ より $k \cdot \frac{e^2}{r} \dots \text{ウ} \dots$ だ。

電子の運動量が p [kg m/s] のとき、電子波の波長は $\frac{h}{p}$ [m] である。電子の軌道の円周の長さが電子波の波長の整数倍のときだけ電子波は定常波となり、電子は定常状態を保って軌道運動を続けることができる。このとき、 $\frac{2\pi r p}{h} = n$ ($n=1,2,3,4,\dots$) $\dots \text{③}$ という関係式が成立

している。この整数 n を量子数という。①より $k \frac{e^2}{r^2} = \frac{p^2}{mr}$ 、③より $\frac{2\pi r p}{h} = n$ だから、 p

を消去して、 $k \frac{e^2}{r^2} = \frac{n^2 h^2}{4n^2 \pi^2 m r^3}$ より、電子の軌道半径 r は $r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 k m e^2} \dots \text{エ} \dots \text{④}$ と

表される。①より $k \frac{e^2}{r^2} = \frac{p^2}{mr}$ 、②より $E = \frac{p^2}{2m} - k \frac{e^2}{r}$ から p を消去し、④を用いて r を置

き換えると、エネルギー E は、 $E = -\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{n^2 h^2} \dots \text{オ} \dots \text{⑤}$ と表される。電子はこのような飛び

飛びの軌道半径、エネルギーの値をとる。 $n=1$ のときの軌道半径を「ボーア半径」と呼ばれ

$r_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 k m e^2}$ である。アインシュタインの光量子説より、電磁波の波長と光子のエネルギー

の関係は $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ である。放出する波長のうち、最も長いものはエネルギー差が小さいも

のより $\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1$ だ。よって $\frac{hc}{\lambda} = \left(-\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{2^2 h^2} \right) - \left(-\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{1^2 h^2} \right)$ より、その波長を求

めると、 $\lambda = \frac{2ch^3}{3\pi^2 k^2 m e^4} \dots \text{カ} \dots$ である。

また、ヘリウムイオンでも、水素原子と同様に考えればよい(原子核の電荷が $+2e$ と変わるだけ)。よって、①が $k \frac{2e^2}{r'^2} = \frac{p'^2}{m r'}$ 、②が $E' = \frac{p'^2}{2m} - k \frac{2e^2}{r'}$ (③は同一)になり、

$r'_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 k m e^2}$ より、 r'_1 はボーア半径の $\frac{1}{2} \dots \text{キ} \dots$ 倍だ。また、この電子を、無限遠まで引

き離すためには $\frac{hc}{\lambda'} \geq E'_\infty - E'_1 = -E'_1 = \frac{8\pi^2 m k^2 e^4}{n^2 h^2}$ だから、 $\lambda' \leq \frac{ch^3}{8\pi^2 m k^2 e^4}$ である。

基底状態にある水素原子の場合の $\lambda \leq \frac{ch^3}{2\pi^2 m k^2 e^4}$ だから、 $\frac{1}{4} \dots \text{ク} \dots$ 倍である。