入試問題研究 第122回　2004年 大阪府立大学 ② X線

電子の質量を $m=9.11\times10^{-31}$ [kg]、電気素量を $e=1.60\times10^{-19}$ [C]、プランク定数を $h=6.63\times10^{-34}$ [Js]、光の速さを $c=3.00\times10^{8}$ [m/s]、および $\sin 78.5°=0.980$ として、以下の問いに答えなさい。ただし、数値は有効数字3桁、(4)では、$\boxed{ア}$ から $\boxed{ク}$ には適当な数式を、$\boxed{ケ}$ には数を入れて文章を完成しなさい。なお、$\boxed{カ}$ と $\boxed{キ}$ は λ、λ' および数字のみで表すこと。

(1) X線管において、陰極から放出された電子は、陰極と陽極の間の電位差(加速電圧)によって加速されるが、陽極に衝突して急激に減速される。このとき、電子が持っていた運動エネルギーの全部または一部が、X線となって陽極から放射される。陽極から出た直後の電子の運動エネルギーを無視すると、加速電圧が 15.0 [kV] の場合に発生するX線の最短波長はいくらになるか。

(2) X線管から発生するさまざまな波長のX線のなかから、特定の波長を持つX線のみを取り出すために、真空中におかれた図1のような装置を使用した。X線管の加速電圧を 15.0 [kV]、図1の結晶の原子配列面の間隔を 4.25×10^{-10} [m]、原子配列面に対するX線の入射および反射角度を 78.5° とした場合、ブラッグ反射されるX線のうち、最も長い波長はいくらになるか。ただし、X線管から結晶までの距離は十分に長く、入射X線の波面は平面とみなせるものとする。

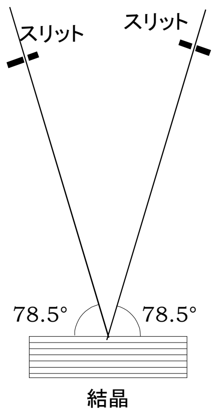

図1

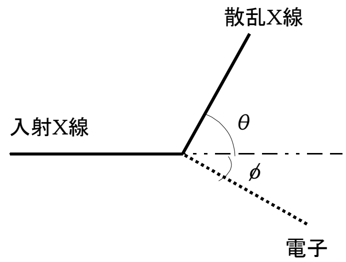

図2

(3) 波長 9.89×10^{-10} [m] で一定の強さのX線を、仕事関数 9.04×10^{19} [J] の金属に照射した。この金属は電流計を通して接地されている。このとき、放出される光電子の運動エネルギーの最大値はいくらか。また、電流計が 2.00×10^{-10} [A] の値を示すとき、1秒間に金属から放出される電子の数はいくらか。

(4) 物質にX線を当てると、電子との衝突によって、入射X線の波長 λ よりも長い波長 λ' を持つ散乱X線が観測されることがある。この減少はX線光子と電子との男性衝突として説明することができる。衝突する前には電子は静止しており、衝突した後の電子との運動量の大きさを p とする。また、入射X線の方向と衝突語のX線および電子の進む向きとの間の角度を、図2のように、それぞれ θ、ϕ とする。ただし、θ、ϕ は正とする。このとき、X線が電子に衝突する前後でのエネルギー保存の法則から

$$hc\times\boxed{カ}=hc\times\boxed{イ}+\frac{p^2}{2m}\quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

が成り立つ。また、運動量保存の法則から

$$h\times\boxed{ウ}=h\times\boxed{エ}+p\cos\phi\quad\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$0=h\times\boxed{オ}-p\sin\phi\quad\cdots\cdots\text{(iii)}$$

の関係が導かれる。(ii)式および(iii)式より、ϕ を消去すると、

$$p^2=h^2\times\boxed{カ}+2h^2(1-\cos\theta)\times\boxed{キ}\quad\cdots\cdots\text{(iv)}$$

と書くことができる。衝突前後のX線の波長差 $\lambda'-\lambda$ が入射X線の波長 λ に比べて十分 小さく、(iv)の右辺の第1項が無視できるものとすれば、p を消去して

$$\lambda'-\lambda=\boxed{ク}\quad\cdots\cdots\text{(v)}$$

が得られる。例えば、波長 7.09×10^{-11} [m] のX線が、電子との衝突によって $\theta=60.0°$ の方向に散乱された場合、(v)式より衝突後のX線の波長は $\boxed{ケ}$ [m] と求まる。

入試問題研究 第122回　2004年 大阪府立大学 ② X線　解答・解説

※X線に関する教科書の記述そのままが出題されている物理IIの基本問題である。

(1) 電子が電位差から受け取るエネルギーが運動エネルギーは、公式 $W=qV$ より、$\frac{1}{2}mv^2=eV$ である。また、アインシュタインの光量子説より、X線光子のエネルギーの公式 $E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$ より $\lambda\geq\frac{hc}{eV}$ だから $\lambda\geq\frac{(6.63\times10^{-34})\times(3.00\times10^{8})}{(1.60\times10^{-19})\times(15.0\times10^{3})}=8.287\times10^{-11}$ である。よって、発生するX線の最短波長は 8.29×10^{-11} [m] になる。

(2) ブラッグ反射の公式 $2d\sin\theta=m\lambda$ （m は整数）を使えばよい。

※ ブラッグ反射の公式での角度の測り方に注意する（反射、屈折の法則での入射角、反射角の測り方とは異なる！）

$2\times(4.25\times10^{-10})\times\sin 78.5°=m\lambda$ だから $\lambda=\frac{2\times(4.25\times10^{-10})\times0.980}{m}=\frac{8.33\times10^{-10}}{m}$ だ。

m は整数だから、波長 λ の最大値は $m=1$ のときになるので 8.33×10^{-10} [m] である。

(3) 金属にX線（光）を当てたときに放出される光電子の運動エネルギーは $\frac{hc}{\lambda}=W+\frac{1}{2}mv^2$ であるから $\frac{1}{2}mv^2=\frac{(6.63\times10^{-34})\times(3.00\times10^{8})}{(9.89\times10^{-10})}-9.04\times10^{-19}=2.01\times10^{-16}-9.04\times10^{-19}$ であるので、放出される電子の運動エネルギーの最大値は 2.00×10^{-16} [J] である。

また、電流 2.00×10^{-10} [A] だから、電子1個の電気量（電気素量）で割ると電子数になる。よって、1秒間に金属から放出される電子の数は $\frac{2.00\times10^{-10}}{1.60\times10^{-19}}=1.25\times10^{9}$ 個である。

(4) 光子のエネルギーは $E=\frac{hc}{\lambda}$ 、運動量は $p=\frac{h}{\lambda}$ だから、エネルギー保存の法則から $\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda'}+\frac{1}{2}mv^2$ が成立する。電子の運動量は $p=mv$ より $\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda'}+\frac{p^2}{2m}$ ・・・① である。よって、 $\frac{1}{\lambda}$ ・・・$\boxed{\text{ア}}$、 $\frac{1}{\lambda'}$ ・・・$\boxed{\text{イ}}$ である。また、運動量保存の法則から、X線入射方向に平行成分は $\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+p\cos\phi$ ・・・② を満たすので $\frac{1}{\lambda}$ ・・・$\boxed{\text{ウ}}$、 $\frac{1}{\lambda'}\cos\theta$ ・・・$\boxed{\text{エ}}$ である。また、X線入射方向に垂直な成分については $0=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta-p\sin\phi$ ・・・③ が成立する。よって、 $\frac{1}{\lambda'}\sin\theta$ ・・・$\boxed{\text{オ}}$ である。②より $p\cos\phi=\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}\cos\theta$ 、③より $p\sin\phi=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta$ だから、

$(p\cos\phi)^2+(p\cos\phi)^2=\left(\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2$ より、 $p^2=\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2$ が成立し $p^2=h^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)^2+2h^2\frac{1}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$ ・・・④より $\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}$ ・・・$\boxed{\text{カ}}$、 $\frac{1}{\lambda\lambda'}$ ・・・$\boxed{\text{キ}}$ である。

また、①より、 $p^2=2mhc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)$ だから、④に代入して p を消去すると、

$2mhc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)=h^2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)^2+2h^2\frac{1}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)$ である。 $\lambda'-\lambda$ が λ に比べて十分小さいので $\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}=\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}\approx0$ である。微小量の2乗を無視して、 $\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$ ・・・$\boxed{\text{ク}}$ である。

波長 7.09×10^{-11} [m] のX線が、電子との衝突によって $\theta=60.0°$ の方向に散乱された場合の数値を代入して $\lambda'=7.09\times10^{-11}+\frac{6.63\times10^{-34}}{(9.11\times10^{-31})\times(3.00\times10^{8})}\times(1-\frac{1}{2})=7.21\times10^{-11}$ ・・・$\boxed{\text{ケ}}$ [m] だから、散乱X線の波長は $\lambda'=7.21\times10^{-11}$ [m] である。