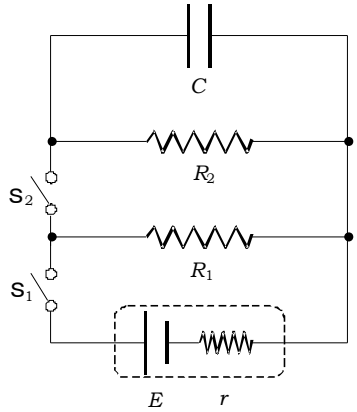
入試問題研究　第１３回　2001 年度　東北大学　後期①コンデンサー回路



図に示すような、起電力 E で内部抵抗が r の電池 E、電気容量 C のコンデンサー C、抵抗値 R_1 、R_2 の抵抗 R_1、R_2 、スイッチ S_1、S_2 から構成されている直流電気回路がある。以下の問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく、考え方および計算の過程も示しなさい。

(1) 抵抗 R_1、R_2 の抵抗値が温度に依存しないとする。

(a) スイッチS_1、S_2を閉じて十分な時間が経過した後、コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー U を C 、E 、r 、および並列抵抗 R_1、R_2 の合成抵抗値 R を用いて表しなさい。

(b) 問(1)(a)で十分な時間が経過した後、S_1を開く。その直後から、電流がゼロになるまでの各時刻に R_1、R_2 で消費される電力 J_1 、J_2 の比を R_1 、R_2 を用いて表しなさい。

(c) 問(1)(b)で S_1 を開いた直後から、電流がゼロになるまでに R_1 で消費された電力量（全電気エネルギー）J を C 、E 、r 、R_1 、R_2 を用いて表しなさい。

(2) 抵抗 R_1 の温度依存性が無視できない場合に、R_1 を流れる電流 I を考える。S_1 だけを閉じて十分な時間が経過した後、抵抗の温度は一定となる。その温度を T としたとき、R_1 の抵抗値は、R_0 、a 、T_0 を正の定数として、$R_1 = R_0\left\{1 + a\left(T - T_0\right)\right\}$ と表されるとする。抵抗で発生するジュール熱はすべて外部に放出される。単位時間当たりに放出される熱量は、k を正の定数として、$k\left(T - T_0\right)$ で与えられるとする。

(a) 抵抗 R_1 を流れる電流 I を求めるための方程式が次の式で与えられることを示しなさい。

$$E - rI = \frac{R_0 I}{1 - \dfrac{aR_0 I^2}{k}}$$

(b) 縦軸を上式左右両辺の値、横軸を I として、左右両辺それぞれの式の概略を表すグラフを、左右両辺が意味を持つ範囲で、同一座標平面上に描きなさい。さらに、電池の起電力 E の大きさによらず、R_1 を流れる電流 I には上限があることを、描いたグラフを利用して示しなさい。

入試問題研究　第１３回　2001 年度 東北大 後期①コンデンサー回路　解答・解説

(1) 抵抗 R_1、R_2 の抵抗値が温度に依存しないとする。

(a) スイッチS_1、S_2を閉じて十分な時間が経過した後、コンデンサーには電流が流れない。また、並列抵抗 R_1、R_2 の合成抵抗値 R として、電池から流れる電流を iとすると、$E=i(R+r)$ である。また、コンデンサーにかかる電圧（=合成抵抗にかかる電圧）は $V=iR$ だから、コンデンサーの電圧は $V=\dfrac{R}{R+r}E$ になる。また、コンデンサーの静電エネルギーの公式 $U=\dfrac{1}{2}CV^2$ だから、これに代入して、$U=\dfrac{1}{2}C\cdot\left(\dfrac{R}{R+r}E\right)^2=\dfrac{CE^2R^2}{2(R+r)^2}$ がコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーである。。

(b) 時刻 tのとき、コンデンサーの電圧を Vとする。並列抵抗それぞれに同じ電圧がかかる。抵抗での消費電力は $J=\dfrac{V^2}{R}$ より、R_1、R_2 で消費される電力は $J_1=\dfrac{V^2}{R_1}$ 、$J_2=\dfrac{V^2}{R_2}$ になる。よって、各抵抗での消費電力の比は $J_1:J_2=R_2:R_1$ である。

(c) R_1 で消費された電力量は、コンデンサーに蓄えられていたエネルギーの $\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ になるから、$J=U\times\dfrac{R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{CE^2R^2}{2(R+r)^2}\cdot\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ 、また、合成抵抗値は $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$ より、$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ だから、これを代入整理して、$J=\dfrac{CE^2R^2}{2(R+r)^2}\cdot\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{CE^2R^3}{2R_1(R+r)^2}$ である。

(2) 抵抗 R_1 の温度依存性が無視できない場合

(a) 抵抗 R_1 を流れる電流 I 、抵抗の温度を T とすると、$R_1=R_0\{1+a(T-T_0)\}$ …①、また、キルヒホッフの第Ⅱ法則より、$E=IR_1+Ir$ …② が成立する。また、抵抗 R_1 で発生するジュール熱は $Q=I^2R_1$ …③ になる。温度が一定になるのだから、発生するジュール熱と放出する熱量が等しい。よって、$Q=k(T-T_0)$ …④ が成立する。

①、②、③、④より、目標の関係式に無い変数 Q、T、T_0 、R_1 を消去するればよいだろう。

はじめに、③、④より、Qを消去する。$I^2R_1=k(T-T_0)$ …⑤ になる。

次に、⑤を①に代入して T、T_0 を消去する。$R_1=R_0\left\{1+\dfrac{aI^2R_1}{k}\right\}$ だから、これより、R_1 を求めると、

$R_1=R_0\left\{1+\dfrac{aI^2R_1}{k}\right\}$ …⑥ である。最後に、⑥を②に代入し、$E=Ir+I\dfrac{R_0}{1-\dfrac{aI^2R_1}{k}}$ より、整理すると、$E-rI=\dfrac{R_0I}{1-\dfrac{aR_0I^2}{k}}$ の関係式が成立する。

(b) 縦軸を上式左右両辺の値を V とすると、$E-rI=\dfrac{R_0 I}{1-\dfrac{aR_0 I^2}{k}}$ と表わすと、$V=E-rI$ …①、

$E-rI=\dfrac{R_0 I}{1-\dfrac{aR_0 I^2}{k}}$ …② の二つのグラフの交点の I の値が、流れる電流値の解になる。また、このとき $I>0$ 、$V>0$ が成立しなければならない。

グラフ①は単調減少関数（1次関数）で $I=0$ で $V=0$ 、グラフ②は単調増加関数で、$I=0$ のとき $V=0$ 、$I=\sqrt{\dfrac{k}{aR_0}}de$ のとき $+\infty$ になるから、両グラフの交点は、$0<I<\sqrt{\dfrac{k}{aR_0}}$ の間に1こだけ存在する。よって、電池の起電力 E にかかわらず、回路に流れる電流の上限 $\sqrt{\dfrac{k}{aR_0}}$ が存在することがわかる。