入試問題研究 第131回　2004年 東北大学 後③　コンプトン効果

図1に示したように、グラファイト（炭素）に波長 λ の特性X線を入射し、散乱されたX線を単結晶に入射する。単結晶は、面間隔 d の原子面が表面に平行であり、紙面垂直方向を軸として自由に回転することができる。このような装置を用いることにより、X線回折の原理を利用してX線の波長を精密に調べることが出来る。なお、入射X線を、直接、単結晶の表面に対して角度 α で入射したところ、強い反射X線が検出器で観察された。このときの角度 α をブラッグ角と呼ぶ。

以下の問いに答えよ。また、結果だけでなく、考え方や計算の過程も記せ。

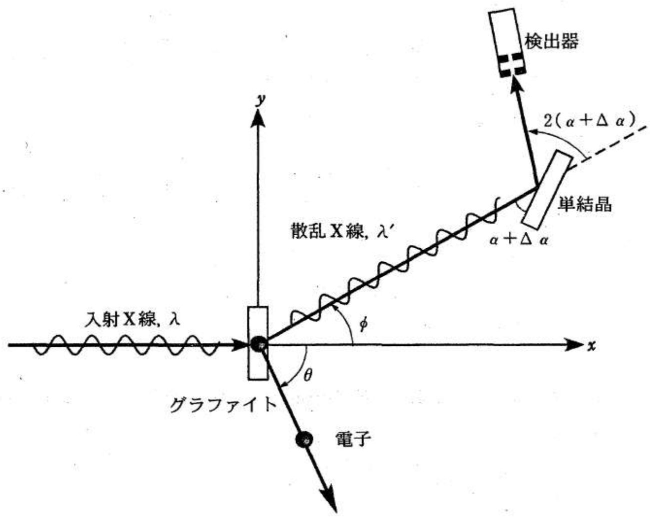

図1

(1) この実験で用いた入射X線の波長 λ を、d 、α 、n を用いて表せ。ただし、n は正の整数とする。なお、結果だけでなく、右上の図を用いて（補助線を入れてもよい）導出せよ。

入射X線の方向に対して角度 ϕ の方向に散乱されたX線を単結晶に入射したところ、入射角度 α と $\alpha+\Delta\alpha$ において、問(1)の $n=1$ に対応する強い散乱X線が測定された。このことから散乱X線の中には入射X線と波長がわずかに異なるX線（波長 λ' ）が含まれることが分かった。この現象（コンプトン効果）について、入射X線とグラファイト内の電子との弾性衝突として考えて、以下の問いに答えよ。ただし、図1に示したように、X線の入射方向を x 方向、入射方向と垂直な方向を y 方向とし、xy 平面内において入射X線の向きと跳ね飛ばされた電子の進む向きとの角度 θ 、電子の質量 m 、電子の衝突後の速さ v 、光の速さ c プランク定数 h とする。

(2) 衝突する前後の x 軸方向と y 軸方向における運動量保存の法則を示す式を λ 、λ' 、ϕ 、θ 、m 、v 、c 、h のうちから必要なものを用いて表せ。

(3) 衝突する前後におけるエネルギー保存の法則を示す式を λ 、λ' 、ϕ 、θ 、m 、v 、c 、h のうちから必要なものを用いて表せ。

(4) 入射X線と散乱X線の波長の差 $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ が次式で表されることを示せ。

$$\Delta\lambda=\frac{h}{2mc}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'}-2\cos\phi\right)$$

(5) 問(4)で示した式において、$\Delta\lambda\ll\lambda$ であるので、$\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}\approx 2$ の近似を用いることが出来る。この場合、コンプトン効果により入射X線が失うエネルギー ΔK とX線の散乱方向との関係を表すグラフとして正しいものを図2の(a)から(h)の中から記号で答えよ。

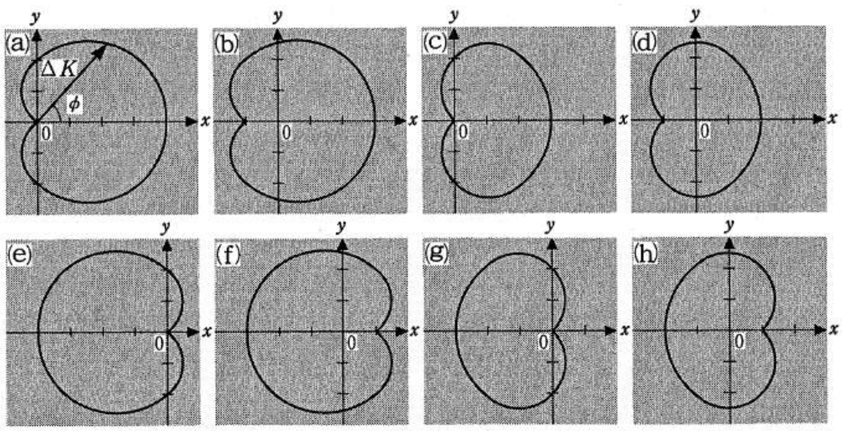

図2

考え方や計算の過程も記せ。なお、図2のグラフは、原点から曲線上の任意の点までのベクトルの大きさが ΔK を、そのベクトルの方向と x 軸正の方向とのなす角度がX線の散乱角 ϕ を表す。

(6) 入射X線の波長が、コンプトン効果により λ から λ' へ変化したことにともなうブラッグ角の変化量 $\Delta\alpha$ を、m 、c 、h 　d 、ϕ 、α を用いて示せ。なお、$\Delta\lambda\ll\lambda$ とし、$\Delta\alpha$ は非常に小さい値であるので、$\sin\Delta\alpha\approx\Delta\alpha$ 、$\cos\Delta\alpha\approx 1$ と近似せよ。

入試問題研究 第131回　2004年 東北大学 後③　コンプトン効果

問題の前半は教科書や問題集などに出ているそのままだから、勉強さえしておれば楽勝だろう。勝負は (5)(6) の問題のところだろう。良く考えると簡単だが、初めて見た設問なので戸惑うかもしれない。そこが東北大学の狙いなのだからね。

(1) **「ブラッグ反射の条件式」**を求める。この場合は $2d\sin\alpha=n\lambda$ だから、 $\lambda=\dfrac{2d\sin\alpha}{n}$ である。

(2) **アインシュタインの「光量子説」**によると、X線光子の運動量は $p=\dfrac{h}{\lambda}$ と表される。衝突前が $p=\dfrac{h}{\lambda}$ 、衝突後のX線光子が $p'=\dfrac{h}{\lambda'}$ 、電子が $p_e=mv$ である。

運動量保存の法則が成立するから、x 方向成分では $\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi+mv\cos\theta$ ・・・① が成立する。

また、y 方向成分では $0=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi-mv\sin\theta$ ・・・②が成立する。

(3) **アインシュタインの「光量子説」**によると、X線光子のエネルギーは $p=\dfrac{hc}{\lambda}$ と表される。よって、

$\dfrac{hc}{\lambda}=\dfrac{hc}{\lambda'}+\dfrac{1}{2}mv^2$ ・・・③ が成立する。

(4) ①より $mv\cos\theta=\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi$ ・・・①’、②より $mv\sin\theta=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi$ ・・・②’ が成立する。両辺を2乗して加えると、 $m^2v^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\left(\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi\right)^2$ である。これを整理して、

$m^2v^2=\left(\dfrac{h}{\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\right)^2-2\dfrac{h}{\lambda}\dfrac{h}{\lambda}'\cos\phi$ ・・・④ が得られる。③より $m^2v^2=2mhc\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\right)$ だから、

$2mhc\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\right)=\left(\dfrac{h}{\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\right)^2-2\dfrac{h}{\lambda}\dfrac{h}{\lambda}'\cos\phi$ である。両辺に $\dfrac{\lambda\lambda'}{h}$ をかけて整理すると、

$\lambda'-\lambda=\dfrac{h}{2mc}\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}-2\cos\phi\right)$ ・・・⑤ が得られる。

(5) $\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}\approx 2$ だから $\lambda'-\lambda=\dfrac{h}{mc}(1-\cos\phi)$ ・・・⑥ である。 $\phi=0$ のとき $\Delta\lambda=0$ 、 $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\Delta\lambda=\dfrac{h}{mc}$ 、 $\phi=\pi$ のとき $\Delta\lambda=\dfrac{2h}{mc}$ だから、エネルギー減少量は $\Delta K=\dfrac{hc}{\lambda}-\dfrac{hc}{\lambda'}$ である。よって、 $\Delta K=\dfrac{hc}{\lambda}-\dfrac{hc}{\lambda+\Delta\lambda}=\dfrac{hc\Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)}\approx\dfrac{hc}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda$ と近似できる。以上より、 ΔK と ϕ の関係は $\phi=0$ では $\Delta K=0$ 、 $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ では $\Delta K=\dfrac{hc}{\lambda^2}\cdot\dfrac{h}{mc}$ 、 $\phi=\pi$ では $\Delta K=\dfrac{hc}{\lambda^2}\cdot\dfrac{2h}{mc}$ になる。よって、グラフの縦横軸の交点からを、正しいグラフは (e) であることが分かる。

(6) ブラッグの条件から $2d\sin\alpha=n\lambda$ ・・・⑦、 $2d\sin(\alpha+\Delta\alpha)=n\lambda'$ ・・・⑧ の2式が成立している。⑧式を加法定理を使って $2d(\sin\alpha\cos\Delta\alpha+\cos\alpha\sin\Delta\alpha)=n\lambda'$ が得られる。 $\Delta\alpha\approx 0$ だから、近似式を使って整理すると $2d(\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\Delta\alpha)=n\lambda'$ ・・・⑨ が得られる。⑦を代入して整理すると、 $2d\cos\alpha\cdot\Delta\alpha=n(\lambda'-\lambda)$ が得られる。⑥を代入して $2d\cos\alpha\cdot\Delta\alpha=\dfrac{h}{mc}(1-\cos\phi)$ になる。

よって、 $\Delta\alpha=\dfrac{h(1-\cos\phi)}{2mcd\cdot\cos\alpha}$ と表すことができる。