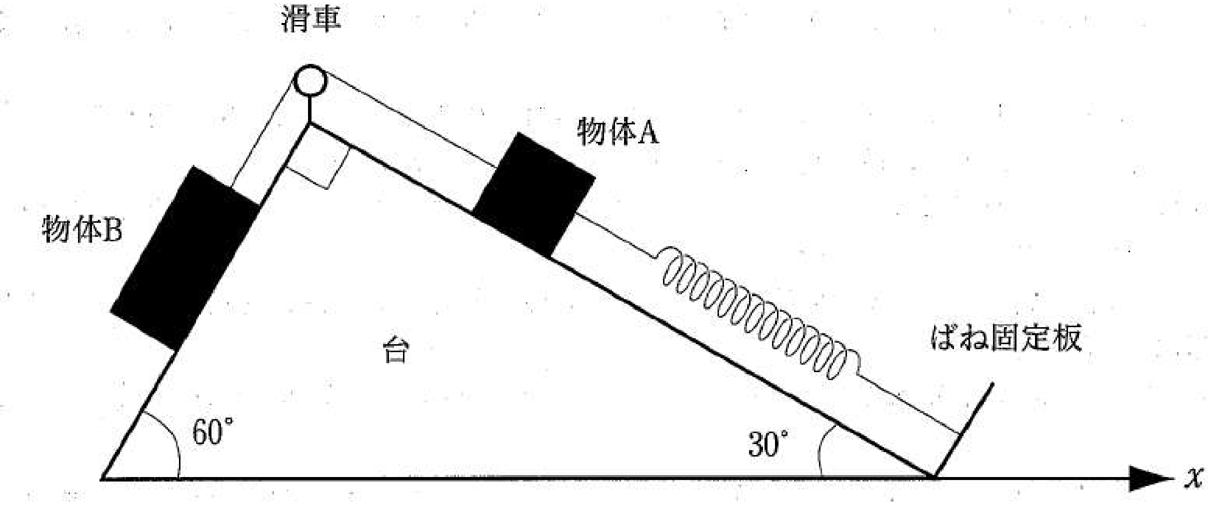
入試問題研究 第 136 回 関西学院大学 ① 単振動

図のように質量 M の物体 A を一端が固定された軽いばねにつなぎ、さらに物体 A と質量 $2M$ の物体 B を軽く摩擦のない滑車を介して糸で結び、摩擦のない斜面を持つ台上でつりあわせた。台は床に固定されている。ばねの自然の長さを L_0 、ばね定数を k 、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。



(1) ばねの長さを求めよ。

物体 A と B を結ぶ糸を切ったところ、物体 A は単振動をはじめた。

(2) 単振動の振幅と、物体 A の最大の速さを求めてみよう。文中の ア ～ エ に当てはまる式を書きなさい。

振動の中心における力のつりあいの条件より、

(振動の中心におけるばねの長さ)－ L_0 ＝ ア

を得る。 ア と問(1)の結果を用いて、単振動の振幅は イ と表される。振動中の最大の速さとは、単振動の中心における速さのことである。糸を切った直後の力学的エネルギーと、単振動の中心における力学的エネルギーが等しいとして、

$$\frac{1}{2}k\times\ \{(\text{問(1) で求めたばねの長さ})-L_0\}^2+(\boxed{\text{ウ}})\times(\boxed{\text{イ}})$$

$$=\frac{1}{2}M\times\ (\text{最大の速さ})^2+\frac{1}{2}k\times\ (\boxed{\text{ア}})^2$$

という関係式が得られる。この式を用いることで、最大の速さは エ であることがわかる。

図の装置を一定の加速度の大きさ a で x 軸の正の向き（x 軸は水平面内にある）に動く電車にのせて上と同様の実験をおこなった（台は電車の床に固定してある）。なお、実験中に物体 A、B が斜面から離れることはなかったとする。

(3) 電車に対して物体 A、B が静止しているとき、ばねの長さはいくらか。

(4) 物体 A、B を結ぶ糸を切ったところ、物体 A は単振動を始めた。同じ電車に乗っている人が観測する単振動の振幅はいくらか。

入試問題研究　第136回　関西学院大学　①単振動　　解答・解説

(1) 糸の張力を T 、ばねの伸びを x とする。両物体のつりあいの条件より、物体Aについて $T-kx-Mg\sin 30°=0$ 、物体Bについて $T-2Mg\sin 60°=0$ が成立する。

$2Mg\sin 60°-kx-Mg\sin 30°=0$ より、ばねの伸び $x=\dfrac{(2\sqrt{3}-1)Mg}{2k}$ ・・・① である。

よって、ばねの長さは $L_0+\dfrac{(2\sqrt{3}-1)Mg}{2k}$ である。

(2) 糸が切れたので張力が無くなる。振動の中心における物体Aの力のつりあいの条件より、

$-Mg\sin 30°-kx_0=0$ だから、ばねの伸びは $x_0=-\dfrac{Mg}{2k}$ ・・・ $\boxed{\text{ア}}$ である。

糸が切れた直後の位置は単振動の端だから、単振動の振幅は $\dfrac{(2\sqrt{3}-1)Mg}{2k}-\left(-\dfrac{Mg}{2k}\right)$ より、 $x=\dfrac{\sqrt{3}Mg}{k}$ ・・・ $\boxed{\text{イ}}$ と表される。振動中の最大の速さとは、単振動の中心における速さのことである。糸を切った直後の力学的エネルギーと、単振動の中心における力学的エネルギーが等しいとして、

$$\frac{1}{2}k\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)Mg}{2k}\right\}^2+(Mg)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}Mg}{k}\sin 30°\right)=\frac{1}{2}Mv_{max}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2$$ という関係式が

得られる。よって、 $Mg\sin 30°=\dfrac{Mg}{2}$ ・・・ $\boxed{\text{ウ}}$ である。この式を整理して、 $v_{max}^2=\dfrac{3Mg^2}{k}$ だから、最大の速さは $v_{max}=g\sqrt{\dfrac{3M}{k}}$ ・・・ $\boxed{\text{エ}}$ である。

［参考］ 単振動の最大速度の公式を使う手がある。 この単振動の角振動数 ω は $\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ だから、

最大速度の公式 $A\omega$ に代入して $\dfrac{\sqrt{3}Mg}{k}\times\sqrt{\dfrac{k}{M}}=g\sqrt{\dfrac{3M}{k}}$ である。これなら計算も簡単だ。

(3) **慣性力が x 軸正の向き（電車の進行方向と逆向き）に加わる。** 同様に力のつりあいより、物体Aは $T-Mg\sin 30°-kx+Ma\cos 30°=0$ 、物体Bは $T-2Mg\sin 60°-2Ma\cos 60°=0$ が成立する。整理して $\sqrt{3}Mg+Ma-\dfrac{Mg}{2}-kx+\dfrac{\sqrt{3}Ma}{2}=0$ だから、そのときのばねの伸びは

$x=\dfrac{M\{(2\sqrt{3}-1)g+(2+\sqrt{3})a\}}{2k}$ より、ばねの長さは $L_0+\dfrac{M\{(2\sqrt{3}-1)g+(2+\sqrt{3})a\}}{2k}$ 。

(4) つりあいの位置でのばねの伸び x は $-Mg\sin 30°-kx+Ma\cos 30°=0$ を満たす。

よって、つりあいの位置（単振動の中心）のばねの伸びは $x=\dfrac{M(\sqrt{3}a-g)}{2k}$ になる。先ほどと同様にして、単振動の振幅を求めると $\dfrac{M\{(2\sqrt{3}-1)g+(2+\sqrt{3})a\}}{2k}-\dfrac{M(\sqrt{3}a-g)}{2k}$ より、

単振動の振幅は $\dfrac{M(\sqrt{3}g+a)}{k}$ である。　※同じ繰り返しを行うだけだね！