入試問題研究　第14回　1999年度　大阪大学　後期　①　　気体

図1のような底面積 S [m^2]、高さ h [m] の直方体の容器の中に気体が閉じ込められている。容器は温度 T [K] に保たれており、それにより気体の温度も T [K] に保たれている。気体は単原子理想気体としてあつかうものとする。気体原子1個の質量を m [kg]、気体定数を R = 8.31 [J/mol・K]、アボガドロ数を N_A = 6.02×10^{23} [個/mol] とする。以下の設問に答えなさい。

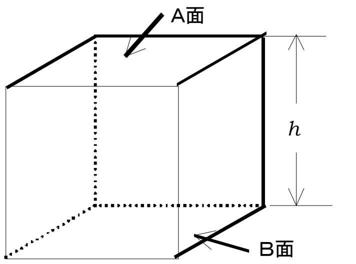

図1

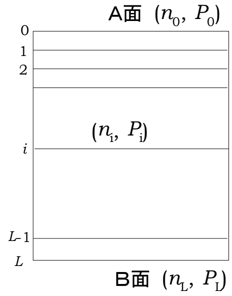

図2

Ⅰ　容器中の気体の密度は一定であるとする。一様な気体では気体の密度 n [mol/m^3] と温度 T [K] が決まれば圧力 P [N/m^2] が決まり、この圧力は容器中のどの部分でも同じである。

問1 T = 300[K]、$P = 1.0\times10^5$[N/m^2]（=1気圧）のとき、気体原子は 1m^3 当り何個存在するか。有効数字２桁で答えなさい。

Ⅱ　重力が働いている場合、気体は一様ではなくなり、気体の圧力は底面からの高さに依存するようになる（重力加速度の大きさは g [m/s^2] で、向きは底面に垂直下方とする）。その結果として、容器の上面Aでの圧力 P_A [N/m^2] と底面Bでの圧力 P_B [N/m^2] は異なる値となる。

問2 P_A、P_B と容器中の気体の全質量 M [kg] との間の関係式を求めなさい。

Ⅲ　重力が働いている場合には、気体の圧力だけでなく、密度も底面からの高さに依存するようになる。容器の上面のごく近くの領域での気体の密度を n_A [mol/m^3]、底面のごく近くの領域での密度を n_B [mol/m^3] とする。ここで「ごく近くの領域」とは原子的な尺度から見れば十分に厚く日常的尺度から見れば十分に薄い厚さの領域のことである。この n_A と n_B の関係を求めるために容器を仮想的に高さ方向に L 等分して考えることにする。図2のように、上面A、等分面、底面Bを i = 0, 2, ..., L と番号づけし、各 i 番目の面のごく近くの領域での気体は、密度 n_i [mol/m^3] と圧力 P_i [N/m^2] をもっているものとする。ただし、$n_0 = n_A$、 $n_L = n_B$、 $P_0 = P_A$、$P_L = P_B$ と約束する。

問3 P_i と n_i の間に成立する関係式を求めなさい。

問4 分割数 L を大きくとると、(i-1) 番目の面と i 番目の面で挟まれる領域の内部では気体の密度変化が無視できるほど小さくなり、この部分の平均密度 $\overline{n_i}$ をもつ一様気体として扱うことが出来る。この平均密度を、領域の上面付近での値 n_{i-1} と下面付近での値 n_i の平均に等しいと考えて、$\overline{n_i}=\dfrac{n_{i-1}+n_i}{2}$ とおく。このとき、P_{i-1} と P_i の間の関係式を求めなさい。 ただし、 $1\leq i\leq L$ とする。

問5 問3と問4の結果に基づいて、比 n_i/n_{i-1} を m、g、h、L、N_A、R、T を用いて表しなさい。
ただし、 $1\leq i\leq L$ とする。

問6 問5の結果より、n_A と n_B の間の関係が得られる。$L\to\infty$ として、比 n_A/n_B の極限値を求めなさい。ただし、指数関数 e^x （e は自然対数の底）に関する公式 $\displaystyle\lim_{L\to\infty}\left(1+\frac{x}{L}\right)^L=e^x$ を用いて良い。

入試問題研究　第14回　1999年度　大阪大学　後期　①　　気体

基本となる知識：状態方程式、圧力、大気圧の原理（上空の気体の重さによる圧力が地上の圧力）、数列、漸化式、極限値（以上は数学の領域）

復習事項：気体の変化（定積、定圧、等温、断熱変化）、熱力学第一法則

問1 状態方程式より $PSh=nRT$ 、その中に nN_A 個あるから、$n=\dfrac{nN_A}{Sh}=\dfrac{N_A P}{RT}$ だから、300[K]のときの気体原子の密度は $n_{300}=\dfrac{N_A P}{RT}=\dfrac{6.02\times10^{23}\times1.0\times10^{5}}{8.31\times300}=2.41..\times10^{25}$ [個/m³] である。

問2 上面の圧力による力と容器内の気体の重さの和が下面の圧力による力である。よって、$P_B S=P_A S+Mg$ だ。

問3 問1より、気体密度は $n_i=\dfrac{n}{V}=\dfrac{P_i}{RT}$ である。　※ここまでは誰でも出来るので点差はつかない💡！　これからが勝負の別れ目

問4 $\overline{n_i}=\dfrac{n_{i-1}+n_i}{2}$ より $\overline{n_i}=\dfrac{P_{i-1}+P_i}{2RT}$ である。また、気体層の力のつりあいより $P_i S=P_{i-1}S+\overline{n_i}S(h/L)N_A mg$ だから、$P_i=P_{i-1}+\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\left(P_{i-1}+P_i\right)$ になるので、$\left(1-\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)P_i=\left(1+\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)P_{i-1}$ である。

問5 $\left(1-\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)P_i=\left(1+\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)P_{i-1}$ より、

気体密度比は $\dfrac{n_i}{n_{i-1}}=\dfrac{P_i}{P_{i-1}}=\left(1+\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)/\left(1-\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)$ である。L が十分に大きいので $\dfrac{N_A hmg}{2LRT}$ は十分に小さいから $\left(1+\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)/\left(1-\dfrac{N_A hmg}{2LRT}\right)\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)$ と近似出来る。

これより、気体の密度比は $\dfrac{n_i}{n_{i-1}}\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)$ と表すことが出来る。

問6 問5より、$n_i=\left(1+\dfrac{N_A hg}{LRT}\right)n_{i-1}$ だから、各層の気体の密度は等比数列になっていることから、最下層の気体密度は、$n_L\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)n_{L-1}\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)^2 n_{L-2}\simeq..\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)^L n_0$ であり、

$n_A=n_0$ 、$n_B=n_L$ であるので、最下層の気体密度は $n_B\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)^L n_A$ になる。したがって、下面、上面の気体の密度比は $\dfrac{n_B}{n_A}\simeq\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)^L$ と表すことが出来る。ここで気体層の区分数 L を無限大まで大きくし、気体の密度比の極限値を求めると、$\dfrac{n_B}{n_A}\simeq\lim\limits_{L\to\infty}\left(1+\dfrac{N_A hmg}{LRT}\right)^L=e^{\frac{N_A hmg}{RT}}$ だから、

$\dfrac{n_A}{n_B}=e^{-\frac{N_A mg}{RT}h}$ と高さの h の関数となる。

参考　気体の圧力で示すと $\dfrac{P_A}{P_B}=\dfrac{n_A}{n_B}=e^{-\frac{N_A mg}{RT}h}$ であるから、地上での気圧を P_0 とすると、高さ h での気圧は $P=P_0\cdot e^{-\frac{N_A mg}{RT}h}$ になる。