

入試問題研究 第140回 2005年 関西学院大学 ③ 電磁気

以下の問(1)～(3)に答えよ。ただし、重力の影響は無視できるとする。

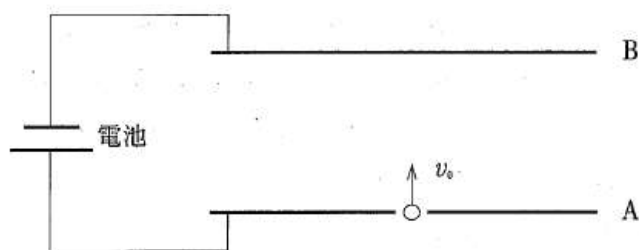


図1

- (1) 図1のように、真空中で平行に置かれた2枚の金属板AとBに電池がつながれており、電位差は V に保たれている。金属板Aには小さな穴が開いており、この穴から質量 m で正電荷 q をもつ粒子が速さ v_0 で、金属板に垂直に入射した。入射後この粒子は金属板の間を進み、時間 T だけたって金属板Bに衝突した。粒子の大きさは無視でき、金属板は十分大きく電場(電界)は一様であるとする。

- (a) 衝突する直前の粒子の速さはいくらか。
- (b) 2枚の金属板の間の電場の大きさはいくらか。
- (c) 2枚の金属板の間隔はいくらか。

- (2) この金属板に平行に、さらに磁束密度 B の一様な磁場(磁界)をかけてから、問(1)と同じ粒子を金属板Aの穴から、速さ v_0 で金属板に入射させた。磁場の向きは図1において紙面に対し垂直上向きであった。粒子は磁場からも力を受けて、軌道は曲線を描き、2枚の金属板から等距離の地点を通過した後、金属板Bに衝突せずに引き返した。2枚の金属板から等距離の地点まで引き返したときの粒子の速さはいくらか。

- (3) 以下の(a)～(f)に答えよ。

問(2)の場合の運動の詳細を考察しよう。そのために、まず2枚の金属板がなく、したがって電場がなく、紙面に対して垂直上向きの磁場だけが存在する場合を考える。磁場の向きに z 軸をとり、 z 軸に垂直に x 軸、 y 軸をとる。時刻ゼロにおいて粒子は原点にあり、初速度(大きさ v_0)は y 軸に平行で正の向きを向いているとする。

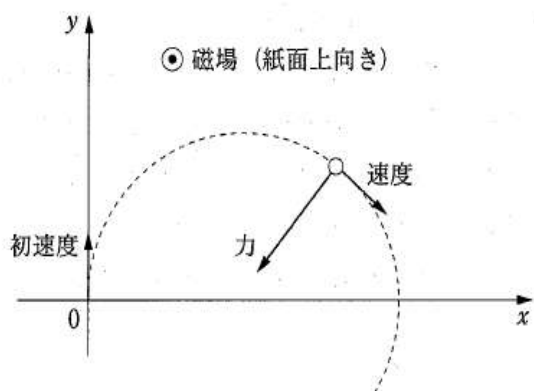


図2

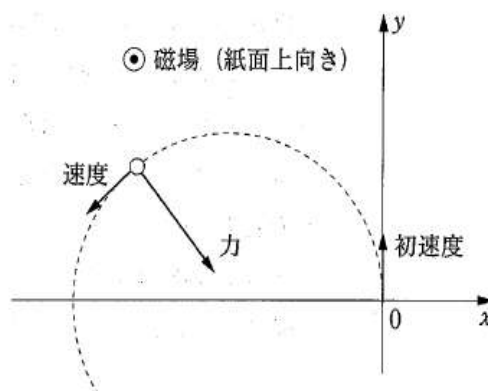


図3

- (a) 粒子には常に一定の大きさの力がはたらく。この力の大きさはいくらか。

- (b) 粒子は等速円運動をおこなう。円運動の半径と周期はいくらか。
- (c) 粒子の円運動の様子は図 2 または図 3 のいずれが正しいか、正しい図の番号を記入せよ。
- (d) 速度の x 成分および y 成分がそれぞれ v_x および v_y のとき、粒子にはたらく力の x 成分、 y 成分は次のように表される。

$$\text{力の } x \text{ 成分} = \boxed{\text{(ア)}} \times v_y, \quad \text{力の } y \text{ 成分} = \boxed{\text{(イ)}} \times v_x$$

$\boxed{\text{(ア)}}$ と $\boxed{\text{(イ)}}$ に、 m 、 q 、 v_0 、 B のうち必要なものを用いて適切な式を記入せよ。ここで再び、問(2)のように、電場と磁場の両方が存在している場合に戻って考える。ただし、粒子の運動を妨げる金属板はなく、大きさが E の一様な電場が粒子の初速度の方向(y 軸正の向き)にかけられているとする。また、このときの速度の x 成分および y 成分をそれぞれ u_x 、 u_y とする。以下の $\boxed{\text{(ウ)}}$ ~ $\boxed{\text{(キ)}}$ に、 m 、 q 、 v_0 、 B 、 E 、 u_x 、 u_y のうちから必要なものを用いて適切な式を記入せよ。

- (e) 粒子にはたらく力の x 成分および y 成分は次のように表される。

$$\text{力の } x \text{ 成分} = \boxed{\text{(ウ)}}、\quad \text{力の } y \text{ 成分} = \boxed{\text{(エ)}}$$

- (f) (d) の結果と (e) の結果を比べることにより以下のことがわかる。

x 軸の正の向きに速さ $\boxed{\text{(オ)}}$ で運動している観測者から見ると、粒子の速度の x 成分

v_x' および y 成分 v_y' は、 $v_x' = \boxed{\text{(カ)}}$ および $v_y' = \boxed{\text{(キ)}}$ のようになる。この

v_x' と v_y' を用いて(e)の結果を書き直した式は (d) の式と同じ形をしている。(すなわち、(d)の式の v_x と v_y をそれぞれ v_x' と v_y' に書き直した式になる)。したがって、観測者には、電場が存在せず磁場だけが存在して、等速円運動をしているように見える。以上のことから、静止している観測者から見ると、粒子は x 軸正の向きに速さ $\boxed{\text{(カ)}}$ で移動する点を中心とした回転運動をしていることになる。

入試問題研究 第140回 2005年 関西学院大学 ③ 電磁気 解答・解説

荷電粒子が電界からの力、磁界からの力（ローレンツ力）を受けて運動するよくある問題。
後半については電界、磁界が同時にかかる面白い問題である。誘導にしたがって解けばよい。

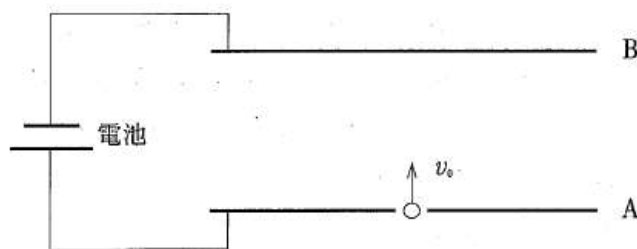


図1

- (1) **荷電粒子が電界からの力を受けて運動する基本的な問題** 図1のように、真空中で平行に置かれた2枚の金属板AとBに電池がつながれており、電位差は V に保たれている。金属板Aには小さな穴が開いており、この穴から質量 m で正電荷 q をもつ粒子が速さ v_0 で、金属板に垂直に入射した。入射後この粒子は金属板の間を進み、時間 T だけたって金属板Bに衝突した。粒子の大きさは無視でき、金属板は十分大きく電場（電界）は一様であるとする。

(a) 電荷が正、電界が進行方向だから、電界からの力が初速度と同じ向きになり加速される。

電位差 V だから衝突するまでに電界から受け取るエネルギー（仕事）は $W = qV$ である。

衝突時の速度を v とすると、エネルギー保存の法則より $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV$ である。

よって、衝突する直前の荷電粒子の速度は $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qV}{m}}$ ……①である。

- (b)、(c) 金属板の間の電場の大きさを E 、極板間の距離を d とすると、 $V = Ed$ ……②、運動量変化は力積に等しいことから、 $m(v - v_0) = qET$ ……③の2式が成立する。

③より $E = \frac{m(v - v_0)}{qT}$ 、 $d = \frac{qTV}{m(v - v_0)}$ になるので、①を代入して整理すると、

極板間の電場は $\frac{m\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2qV}{m}} - v_0\right)}{qT}$ 、極板間の距離は $\frac{qTV}{m\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2qV}{m}} - v_0\right)}$ になる。

- (2) 磁場からの力は粒子に仕事をしない（進行方向と垂直は力だから）。よって、荷電粒子は金属板の中央部（両極板から等しい距離）を通過するときだ。電界が一様だから、電位差は半分だから、(1)と同様にエネルギー保存の法則より $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}qV$ が整理する。よって、

衝突する直前の荷電粒子の速度は $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{qV}{m}}$ ……①である。

- (3) 問(2)の場合の運動の詳細を考察しよう。最初は電場がなく、紙面に対して垂直上向きの磁場だけが存在する場合を考える。磁場の向きに z 軸をとり、 z 軸に垂直に x 軸、 y 軸をとる。時刻ゼロにおいて粒子は原点にあり、初速度（大きさ v_0 ）は y 軸に平行で正の向きを向いてい

るとする。

(a) 粒子には磁場からの力(ローレンツ力)の公式より、 $f=qv_0B$ の力が働く。

(b) 等速円運動の半径を r とすると、向心力=ローレンツ力より、 $\frac{mv_0^2}{r}=qv_0B$ だから、円

運動の半径は $\frac{mv_0}{qB}$ である。また、周期(円周を1回まわる時間)は $\frac{2\pi m}{qB}$ である。

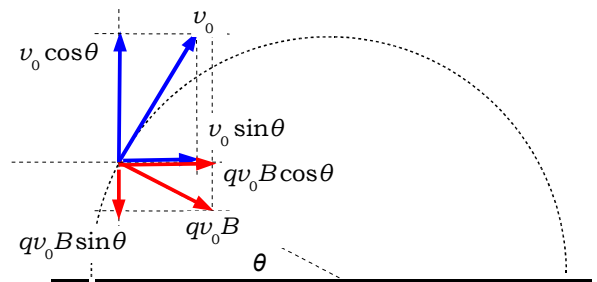
(c) フレミングの左手の法則より、ローレンツ力(向心力)の向きは進行方向右向き(紙面上で)だから、進行方向右向きに中心がある。よって、図2の円運動になるから答えは2だ。

(d) 右図を元に考える。速度の x 成分 $v_x=v_0\sin\theta$ 、 y 成分 $v_y=v_0\cos\theta$ のとき、粒子にはたらく力 $f=qv_0B$ の x 成分、 y 成分は、

$f_x=qv_0B\cos\theta$ 、 $f_y=-qv_0B\sin\theta$ になるので $f_x=qBv_0\cos\theta=qBv_y$ である。

同様に、 $f_y=-qBv_0\sin\theta=-qBv_x$ であ

る。よって、空欄は $qB \cdots$ ア、 $-qB$
 $\cdots$ イ である。



電場と磁場が同時にかかる場合、磁場からの力に加えて電場からの力(y 方向に qE)を考慮すればよい。このときの速度の x 成分および y 成分をそれぞれ u_x 、 u_y とする。

粒子の運動を妨げる金属板はなく、大きさが E の一様な電場が粒子の初速度の方向(y 軸正の向き)にかけられているとする。また、以下の ウ ~ キ に、 m 、 q 、

v_0 、 B 、 E 、 u_x 、 u_y のうちから必要なものを用いて適切な式を記入せよ。

(e) x 方向は $f_x=qBu_y \cdots$ ウ、 y 方向は電場の力が加わり $f_y=-qBu_x+qE \cdots$

エ になる。 $f_y=-qB\left(u_x-\frac{E}{B}\right)$ だから、 x 軸の正の向きに速さ $\frac{E}{B} \cdots$ オ で運

動している観測者から見た粒子の速度の x 成分 $v_x'=u_x-\frac{E}{B} \cdots$ カ および y 成分

$v_y'=u_y \cdots$ キ とすれば、電場がない場合と同じ式になる(解けない式が解ける)。

この v_x' と v_y' を用いて(e)の結果を書き直した式は(d)の式と同じ形(すなわち、(d)の式の v_x と v_y をそれぞれ v_x' と v_y' に書き直した式になる)だから、観測者には、電場が存在せず磁場だけが存在して等速円運動をしているのと同じに見える。

以上より、静止している観測者から見ると、粒子は x 軸正の向きに速さ $\frac{E}{B}$ で移動する点を中心とした等速円運動をしていることになる。

※ 電場があるのに電場の方向に進んで行かない不思議な運動になるのだ。