

### 入試問題研究 第141回 2005年 慶応大学 理工 ③ 気体

理想気体とみなせる 1 mol の気体(単原子分子気体とは限らない)が、なめらかに動くピストンでシリンダー内に閉じ込められている。この気体の状態を下記のように過程 I ~IVによって、状態 1→2→3→4→1 と変化させた。

状態 1： 気体の体積  $V_1$ 、温度  $T_1=400$  K、圧力  $p_1=100$  kPa

過程 I： 状態 1 から状態 2 へ気体を体積一定で変化させた。

状態 2： 気体の体積  $V_2=V_1$ 、温度  $T_2=500$  K、圧力  $p_2$

過程 II： 状態 2 から状態 3 へ気体を断熱変化させた。

状態 3： 気体の体積  $V_3$ 、温度  $T_3=600$  K、圧力  $p_3$

過程 III： 状態 3 から状態 4 へ気体を体積一定で変化させ、圧力を 100 kPa ( $=p_1$ ) にした。

状態 4： 気体の体積  $V_4=V_3$ 、温度  $T_4$  K、圧力  $p_4=p_1$

過程 IV： 気体を圧力定めの過程で状態 4 から状態 1 にもどした。

過程 I ~IVは常に閉鎖状態を保ちながら行われ、断熱変化では圧力  $p$  と体積  $V$  の間に  $pV^\gamma = \text{一定}$  の関係が保たれている。ここで  $\gamma$  は 1 より大きい定数である。気体の定積モル比熱を  $c$  J/mol·K とする。熱量および仕事の符号は、気体に熱量を与えた場合および、気体に仕事をした場合に正とする。以下の設問に答えなさい。ただし、気体定数を  $R=a$  J/mol·K とし、

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = b \text{ とおく。 } \gamma, a, b, c \text{ は単位を含まない数値である。設問(2)、(3)、(4)は解答}$$

欄に与えられた単位を用いて数値で答えなさい( $a$ 、 $b$ 、 $c$  は記号のまま用いること)。単位を含む気体定数の記号  $R$  を用いないように注意しなさい。

- (1) 断熱変化の過程における  $pV^\gamma = \text{一定}$  の関係を、圧力  $p$  と温度  $T$  のみの  $V$  を含まない関係を表すと  $pT^\alpha = \text{一定}$  と書ける。 $\alpha$  を  $\gamma$  で表しなさい。
- (2)  $p_3$  を求めなさい。
- (3) 過程 I ~IVのそれぞれにおいて外部からこの気体にした仕事を求めなさい。
- (4) 状態 4 から状態 1 に変化する過程IVで、外部から気体を与えた熱量および気体の温度変化  $T_1 - T_4$  を求め、この気体の定圧モル比熱を求めなさい。

入試問題研究 第141回 2005年 慶応大学 理工 ③ 気体 解答・解説

(1) 状態方程式  $pV=nRT$  より  $V=\frac{nRT}{p}$  を断熱変化の過程における  $pV^\gamma = \text{一定}$  の関係式に代

入して  $p\left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = \text{一定}$  が成立する。  $nR$  は一定だから、  $p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{一定}$  であるので

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{一定} \text{ と書ける。 } \alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma} \text{ である。}$$

(2) 状態方程式は、状態1が  $100 \times 10^3 \times V_1 = a \times 400 \dots \textcircled{1}$ 、状態2が  $p_2 \times V_1 = a \times 500 \dots \textcircled{2}$ 、  
状態3が  $p_3 \times V_3 = a \times 600 \dots \textcircled{3}$ 、状態4が  $100 \times 10^3 \times V_3 = a \times T_4 \dots \textcircled{4}$  である。

①、②より、  $p_2 = 125 \times 10^3 \dots \textcircled{5}$  が得られる。

過程IIで(1)の結果の断熱変化の関係式に代入して  $125 \times 10^3 \times 500^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_3 \times 600^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$  だから、

$$p_3 = 125 \times 10^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \text{ である。問題文中の } \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = b \text{ を使って式を整理すると、}$$

$$p_3 = 125b \times 10^3 \dots \textcircled{6} \text{ である。}$$

(3) 各過程での気体が受けた仕事を求める。(ついでに内部エネルギーの増加も)

過程I この過程は定積変化だから仕事は  $W_1 = 0$  である。

内部エネルギーの増加は  $\Delta U_1 = 100c$  である。

過程II 断熱変化より、「外部からこの気体にした仕事」は「内部エネルギーの変化」と等しい。

内部エネルギーの変化の公式  $\Delta U = n c_v \Delta T$  より、  $1 \times c \times 100 = 100c$  が内部エネルギーの変化だから、外部から受けた仕事は  $W_2 = 100c$  である。

内部エネルギーの増加は  $\Delta U_2 = 100c$  である。

過程III この過程も定積変化だから仕事は  $W_3 = 0$  である。(③、④より  $T_4 = \frac{600 \times 100 \times 10^3}{p_3}$  だ。

$$\text{内部エネルギーの増加は、⑥を代入して } T_4 = \frac{480}{b} \text{ だから、 } \Delta U_3 = c \left( \frac{480}{b} - 600 \right)$$

過程IV 定圧変化だから外部から受けた仕事は  $W_4 = 100 \times 10^3 \times (V_3 - V_1) \dots \textcircled{7}$  である。

$$\textcircled{1} \text{ より } V_1 = \frac{400a}{100 \times 10^3} \text{、③、⑥より、 } V_3 = \frac{600a}{125b \times 10^3} \text{ だから、⑦に代入して整理して}$$

$$\text{求めると、気体が受けた仕事は } W_4 = a \left( \frac{480}{b} - 400 \right) \dots \textcircled{8} \text{ である。}$$

$$\text{内部エネルギーの増加は } \Delta U_4 = c \left( 400 - \frac{480}{b} \right) \text{ である。}$$

(4) 状態4から状態1に変化する過程IVでの温度変化は  $\Delta T = T_1 - T_4 = 400 - \frac{480}{b}$  である。また、

内部エネルギー増加は  $\Delta U = n c_v \Delta T$  より、  $\Delta U_4 = c \left( 400 - \frac{480}{b} \right)$  が成立する。また、気体が受

ける仕事は⑦より  $W = a \left( \frac{480}{b} - 400 \right)$  である。

気体が受け取る熱を  $Q$  とすると、熱力学第一法則より  $\Delta U_4 = Q + W$  が成立するから、

$$Q = \left( 400 - \frac{480}{b} \right) (a + c) \text{ である。よって、この気体の定圧モル比熱は } c_p = \frac{Q}{\Delta T} = a + c \text{ である。}$$