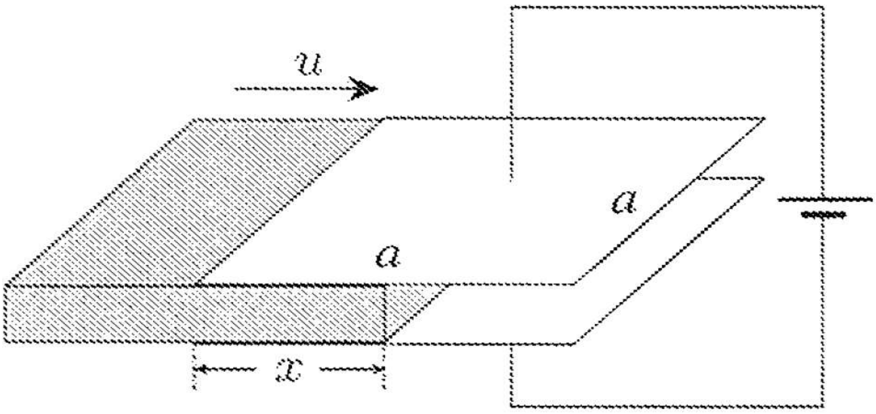
入試問題研究 第 142 回　2005 年 上智大学 ② コンデンサー(改作)



一辺の長さが a の正方形の極板を使った電気容量 C の平行板コンデンサーがある。電圧 V の電池に接続されている極板間には、同形で同じ厚さの比誘電率が４の誘電体が挿入できるようになっている。極板間隔は a に比べて十分小さいものとする。

1．極板が電池につながれた状態で極板間の電位差を V に保ったまま、十分ゆっくりと速さ u で誘電体を挿入する過程を考える。図のように、 x だけ挿入したときのコンデンサーの電気容量は $\boxed{①}$ と表される。誘電体をさらに Δx だけ挿入したときのコンデンサーの電気容量の変化分は $\boxed{②}$ となる。極板上の電荷の変化量は $\boxed{③}$ と表される。したがって、この誘電体を挿入する過程で回路を流れる電流は $\boxed{④}$ となることが分かる。また、この過程で、コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーは $\boxed{⑤}$ だけ変化する。このエネルギー変化分が電池が電荷を運ぶ仕事 $\boxed{⑥}$ と誘電体を挿入するために外から加えられた力 F の大きさは $\boxed{⑦}$ で、向きが $\boxed{⑧}$ 方向であることが分かる。

2．次に誘電体を完全に挿入して十分長い時間がたった後に電池を外し、誘電体をゆっくりと完全に抜く。このとき、引き抜いた後の極板間の電位差は $\boxed{⑨}$ となり、誘電体を引き抜く前後で、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの変化量は $\boxed{⑩}$ となる。

入試問題研究 第142回　2005年 上智大学 ② コンデンサー(改作) 解答・解説

一辺の長さが a の正方形の極板を間隔 r とした平行板コンデンサーの電気容量は、公式 $C=\dfrac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$ より、 $C=\dfrac{\epsilon_0 a^2}{d}$ が成立する。これがこの問題のポイントとなる。

1.　x だけ誘電体を挿入したときのコンデンサーの電気容量は、**「挿入された部分」 と 「未挿入部分のコンデンサー」 の2つのコンデンサーの 「並列接続」** と考えることができる。

その電気容量は $C_1=\dfrac{\epsilon_0 a(a-x)}{d}+\dfrac{4\epsilon_0 a x}{d}$ と表される。整理すると $C_1=\dfrac{\epsilon_0 a^2}{d}+\dfrac{3\epsilon_0 a x}{d}$ だから $C_1=\left(1+\dfrac{3x}{a}\right)C$ ・・・① である。誘電体をさらに Δx だけ挿入したとき、コンデンサーの電気容量は $C_2=\left(1+\dfrac{3(x+\Delta x)}{a}\right)C$ だから、変化分は $\Delta C=\dfrac{3\Delta x}{a}\cdot C$ ・・・② である。

極板の電荷の変化量は $\Delta Q=C_2\cdot V-C_1\cdot V=\Delta C\cdot V$ より、 $\Delta Q=\dfrac{3\Delta x\cdot CV}{a}$ ・・・③ と表される。**「電流は単位時間に流れる電気量」** だから、この誘電体を挿入する過程で流れる電流は $I=\dfrac{3u\cdot CV}{a}$ ・・・④ である。また、この過程でのコンデンサーの静電エネルギーの変化は $\Delta U=\dfrac{1}{2}C_2V^2-\dfrac{1}{2}C_1V^2=\dfrac{1}{2}\Delta CV^2$ であるので、 $\Delta U=\dfrac{3\Delta x\cdot CV^2}{2a}$ ・・・⑤ である。

電池が電荷を運ぶ仕事は $W=\Delta Q\cdot V$ より $W_1=\dfrac{3\Delta x\cdot CV^2}{a}$ ・・・⑥ である。

外力がコンデンサーに加えた仕事は、誘電体を挿入力を F とすると $W_2=F\Delta x$ である。エネルギー保存の法則より $\Delta U=W_1+W_2$ だから $\dfrac{3\Delta x\cdot CV^2}{2a}=\dfrac{3\Delta xCV^2}{a}+F\Delta x$ が成立する。よって、そのとき誘電体に加えた外力は $F=-\dfrac{3CV^2}{2a}$ である。よって、外から加えた力の大きさは $F=\dfrac{3CV^2}{2a}$ ・・・⑦、向きは、図の左(誘電体を引き抜く)・・・⑧方向である。

2.　平行板コンデンサーの電気容量の公式より、誘電体を完全に挿入したコンデンサーの電気容量は $C_3=\dfrac{4\epsilon_0 a^2}{d}=4C$ になる。十分長い時間がたったときに蓄えられている電気量は $Q_3=4CV$ である。電池を外し(極板の電荷は変化できない)、誘電体をゆっくりと完全に抜くと電気容量は C に戻る。その間、極板の電荷の電気量は変わらない。よって、誘電体を抜いたコンデンサーの電圧を V_3 とすると、電気量が変化しないことから $4CV=CV_3$ が成立する。よって、引き抜いた後のコンデンサーの極板間の電位差は $4V$ ・・・⑨ となる。

以上より、静電エネルギーの変化は $\Delta U=\dfrac{1}{2}\cdot C\cdot(4V)^2-\dfrac{1}{2}\cdot(4C)\cdot V^2=6CV^2$ ・・・⑩ である。