入試問題研究 第 143 回 2005 年 上智大学 ① 力学

質量 m の小さなおもりAを、長さ l の軽くて伸びないひもの一端につけて次の実験を行う。重力加速度を g とする。

図 1


図 2

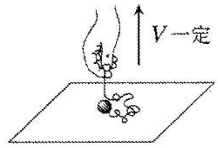
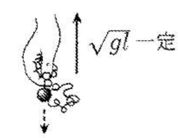
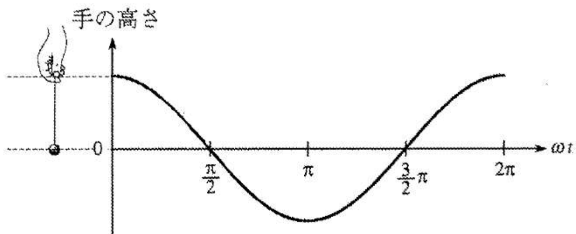

図 3


図 4


1．ひものもう一端に質量 M（$>m$）のおもりBをつけてなめらかな床の上において、図１のように、ひもがたるんだ状態で、おもりAに v おもりBに V（$>v$）の初速度を与えた。しばらくすると、ひもが伸びきった状態になるが、その直前と直後では、2つのおもりの相対速度の大きさが等しく、ひもを介した完全弾性衝突が起こることがわかった。ひもが伸びきった直後のおもりAの速さは $v'=$ $\boxed{\text{①}}$、Bの速さは $V'=$ $\boxed{\text{②}}$ である。この結果より、M を大きくしていくと、V' が V に近づいていくことが分かる。次に、図２のように、おもりBをはずしてひもを手で一定速度 V（$>v$）で引っ張り続けた。すると、ひもが伸びきった直後のおもりAの速さは $v'=$ $\boxed{\text{③}}$ × V − $\boxed{\text{④}}$ × v となる。

2．図３のように、おもりAを床の上に置いた状態から、手でひもの端を一定速度 V で鉛直上方に引っ張った。すると、ひもが伸びきった直後のおもりの速さは $\boxed{\text{⑤}}$ × V となる。その後、おもりがひもを引っ張っている手に追いつくための条件は $V \geq$ $\boxed{\text{⑥}}$ × $\sqrt{gl}$ である。

3．図４のように、おもりAとひもの端が同じ場所にある状態から、時刻 $t=0$ におもりを自由落下させると同時に、ひもの端をおもりの鉛直上方に一定速度 $\sqrt{gl}$ で引っ張った。すると、時刻 $t=$ $\boxed{\text{⑦}}$ × $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ にひもが伸びきり、その直後におもりの速さは $\boxed{\text{⑧}}$ × $\sqrt{gl}$ となる。その後、$\boxed{\text{⑨}}$ × $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ だけ時間が経つと、おもりはひもを引っ張っている手に追いつく。そのときのおもりの速さは $\boxed{\text{⑩}}$ × $\sqrt{gl}$ となる。

図 5


4．図５のように、手でおもりAをつり下げた状態を考える。時刻 $t=0$ からひもを引っ張っている手の高さを $l\cos\omega t$ でゆっくり動かす。ω が小さいときは、ひもはたるむことなくおもりAは手の動きについていくが、ω を大きくして $\omega >$ $\boxed{\text{⑪}}$ × $\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ を満たすようになると、ひもがたるんだ。一度ひもがたるんだ後に、$\omega t=\dfrac{3\pi}{2}$ のときに初めてひもが伸びきるようにするには、$\omega =$ $\boxed{\text{⑫}}$ × $\pi\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ とすればよい。すると、ひもが伸びきった直前と直後のおもりAの速さは、各々、$\boxed{\text{⑬}}$ × $\sqrt{gl}$ と($\boxed{\text{⑭}}$ π ＋ $\boxed{\text{⑮}}$)× $\sqrt{gl}$ である。

入試問題研究　第 143 回　2005 年　上智大学　①　力学　　解答・解説

※ 解答欄に記入する数値までは書くのを省いている。数式の係数から分かるはずですからね！

1．ひもを介した完全弾性衝突が起こると考えるのだから、運動量保存の法則とはねかえり係数が1になることの2つを使えばよい。 $mv+MV=mv'+MV'$ 、 $1=-\dfrac{v'-V'}{v-V}$ が成立する。

これを解いて、A が $v'=\dfrac{(m-M)v+2MV}{m+M}$ ・・・①、B が $V'=\dfrac{2mv+(M-m)V}{m+M}$ ・・・②である。この結果より、 M を大きくしていくと、 V' が V に近づいていくことが分かる（**これがヒントですね！**）。次に、図２のように、おもりＢをはずしてひもを手で一定速度 V $(>v)$ で引っ張り続けた（**M を大きいと考えよう！**）。ひもが伸びきった直後のおもりＡの速さは

$v'=\dfrac{(m-M)v+2MV}{m+M}$ の M を十分に大きくしたときの値である。よって、分子分母を

M で割って、 $\dfrac{m}{M}\to 0$ を適用すればよい。よって、 $v'=2V-v$ ・・・③、④ である。

2．図３の場合も、図２の場合と同様だ（**おもりの速度変化が短時間で終わるので重力による力積は無視できるから**）。始めのおもりの速度は $v=0$ だから $v'=2V$ ・・・⑤ である。その後、下向きに加速度 g の等加速度運動になる。手からみた初速度は $v_0=2V-V=V$ 、加速度は $-g$ である。よって、手に最も近づくとき速度がゼロになることを利用して、等加速度運動の公式を適用すると、 $0^2-V^2=-2gx$ より、手に追いつく条件は $\dfrac{V^2}{2g}>l$ である。よって、

$V\geq\sqrt{2gl}$ ・・・⑥ である。

3．図４のように、おもりＡとひもの端が同じ場所にある状態から、時刻 $t=0$ におもりを自由落下させると同時にひもの端をおもりの鉛直上方に一定速度 $\sqrt{gl}$ で引っ張った。ひもが伸びきる時刻を t とすると、おもりＡは自由落下運動、ひもは等速運動だから、 $\dfrac{1}{2}gt^2+\sqrt{gl}\cdot t=l$

が成立する。これより、ひもが伸びきる時刻は $t=(\sqrt{3}-1)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ・・・⑦ である。また、ひもが伸びきる直前の、床から見たおもりＡの速度は $v_3=(\sqrt{3}-1)\sqrt{gl}$ （下向き）になる。

上向きを正として、２と同様にして、 $v'=2\sqrt{gl}-(1-\sqrt{3})\sqrt{gl}$ より、その直後のおもりの速さは $v'=(1+\sqrt{3})\sqrt{gl}$ ・・・⑧ である。

ひもが伸びきってからおもりが手に追いつくまでの時間を t として、３と同様に手から見たおもりの運動を考える。おもりが手に追いつくとき $(1+\sqrt{3})\sqrt{gl}t-\dfrac{1}{2}gt-\sqrt{gl}\cdot t=l$ が成立する。

整理して $gt^2-2\sqrt{3}\sqrt{gl}\cdot t+2l=0$ より $t=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{gl}\pm\sqrt{gl}}{g}$ だから、 $t=(\sqrt{3}-1)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ・・・⑨

である。 なお、 $t=(\sqrt{3}+1)\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ の解は、おもりＡが手を一度追い越した後、おもりＡが手に追い越される時刻に当たるので今回の計算では不適解となる。

また、そのときのおもりの速さは $v_3=(1+\sqrt{3})\sqrt{gl}-g(\sqrt{3}-1)\sqrt{\dfrac{l}{g}}=2\sqrt{gl}$ ・・・⑩ である。

4．図５のように、手（ひも）から見たおもりの運動を考える。手が $l\cos\omega t$ で動くので、手（ひも）の加速度は $-\omega^2 l\cos\omega t$ であるのでおもりの相対運動を考えるとき、慣性力 $m\omega^2 l\cos\omega t$ を考慮しなければならない。

ひもの張力を T とすると、つりあいの式は $T-mg+m\omega^2 l\cos\omega t=0$ である。手からひもがゆるまない条件は $T>0$ だから、ひもがゆるまない条件は $mg>m\omega^2 l\cos\omega t$ が常に成立することである。よって、 $\dfrac{g}{\omega^2 l}>\cos\omega t$ が時刻に係らず成立するのだから $\dfrac{g}{\omega^2 l}>1$ すなわち $\omega<\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ である。しかし、 $\dfrac{g}{\omega^2 l}<1$ すなわち $\omega>\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ・・・⑪ ではひもがたるんでしまう。

ひもがたるむ位置を求めてみよう。ひもがたるむとき $mg=m\omega^2 l\cos\omega t$ が成立する。よって、

$y=l\cos\omega t_0=\dfrac{g}{\omega^2}$ $(<l)$ の位置である。

$\omega t=0$ （スタート直後）で既にひもがゆるむことが分かる。そこで、おもりＡは落下運動（等加速度運動）をする。時刻ゼロのときのおもりＡの高さは l 、速度はゼロである。

$\omega t=\dfrac{3\pi}{2}$ のときに初めてひもが伸びきるのだから、時刻 $t=\dfrac{3\pi}{2\omega}$ のとき、おもりＡは高さが０まで自由落下する。等加速度運動の公式を適用すればよい。初速度ゼロ、加速度 g 、落下距離 l より $l=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{3\pi}{2\omega}\right)^2$ が成立するから、単振動の角振動数 $\omega=\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{4}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ・・・⑫ が求まる。同様に、等加速度運動の公式を適用して、おもりＡの速度は $v_5=-g\left(\dfrac{3\pi}{2\omega}\right)$ を満たす。角振動数 $\omega=\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{4}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ を代入すると、おもりＡの速度は $v_5=-\sqrt{2}\sqrt{gl}$ ・・・⑬ であることがわかる。また、時刻 $t=\dfrac{3\pi}{2\omega}$ でのひもの速度は、ひもは単振動だから、単振動の速度の公式を使えばよい。よって、そのときのひもの速度は $v_6=\omega l=\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{4}\sqrt{gl}$ である。

以上の結果を前問の「一定速度で引かれるひもとおもりの場合」の結果 $v'=2V-v$ に当てはめると、ひもが伸びきった直後のＡの速さは $v_7=2\left(\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{4}\sqrt{gl}\right)-\left(-\sqrt{2}\sqrt{gl}\right)$ になる。

これを整理すると、 $v_7=\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\pi+\sqrt{2}\right)\sqrt{gl}$ ・・・⑭．⑮ が得られる。