

入試問題研究 第144回 2005年 早稲田大学 ④ ボーアの理論応用

以下の文章の空欄にあてはまる答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

電子などのミクロな粒子が位置エネルギーの谷間に閉じ込められると、エネルギーがとびとびの値しかとれなくなるなど、ニュートンの力学とは根本的に異なる特徴が現れる。このようなミクロな世界のありかたは、ド・ブロイにしたがって、ミクロな粒子が単なる粒子ではなく波でもある、という物質波の考えを取り入れると理解しやすくなる。ド・ブロイは粒子が波としての性質をあわせもつと考え、プランク定数を h 、粒子の運動量を p とすると、その波長は ① であるとした。以下では質量 m の電子が x - y 平面上を、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみに依存する力を受けて円運動するとしていくつかの例を考えてみる。

まず、ド・ブロイの考えをボーアの水素原子模型に当てはめてみよう。電荷 $-e$ の電子が、座標原点に置かれた電荷 $+e$ の陽子を中心とする半径 r の円軌道上を、速さ v で運動しているとする。陽子の質量は電子のそれに対して、無限に大きいとみなすことにし、電子の円運動の向心力が陽子と電子のクーロン力 $-k \frac{e^2}{r^2}$ (k は比例定数) によるとすると、 r と v の関係が

$r =$ ② と求まる。電子がド・ブロイ波が定在波になっている条件を r と v の関係として表すと、 n を自然数として、 $r =$ ③ とかける。これらの関係から n 番目の軌道上をまわる電子の速さは ④ となり、それを用いて n 番目の軌道の半径を表すと ⑤ となる。したがって、 n 番目の軌道の運動エネルギーと位置エネルギーの和、すなわち全エネルギー

E_n は ⑥ と求まる。 $n+1$ 番目と n 番目のエネルギーの差 $E_{n+1} - E_n$ は、⑦ となる。これに等しいエネルギーの光子が原子から出てくると考えると、実験的に観測された水素原子の線スペクトルが、ボーアの模型によってみごとに説明される。

おなじ考えを、位置エネルギーが $V(r) = \frac{1}{2} C r^2$ で与えられる電子に適用してみよう。ただし、

C は正の定数である。この場合、電子はフックの法則にしたがう向心力を受けて円運動を行うので、運動方程式から r と v の関係が $v =$ ⑧ と求まる。これと定在波条件を組み合わせると、半径と速さとして許されるとびとびの値が決まるので、この系の n 番目の軌道の全エネルギーは E_n は ⑨ と求まる。この状況は、量子ドットと呼ばれる半導体素子などで実際に現れる。

さらに位置エネルギーが $V(r) = f r$ で与えられる系があったとしよう。ただし、 f は正の定数である。これは原点からの距離 r によらない一定の向心力を受ける電子と見ることが出来る。この場合、上と同様の解析をすると、 n 番目の軌道の全エネルギーは E_n は ⑩ と求まる。

※ ① から⑦までは教科書のボーアの理論での説明と同じで、解けて当たり前。合否を決めるのは⑧から⑩の部分だ。同じ考え方を適用して解けばよい。位置エネルギーが与えられているので、距離（位置）で微分すれば力である。

入試問題研究 第144回 2005年 早稲田大学 ④ ボーアの理論応用 解答・解説

※ 前半は教科書の通りの問題で誰でも出来る。後半がどこまで出来るかで合否が決まる。

ド・ブロイの物質は理論によると、プランク定数を h 、粒子の運動量を p とすると、その粒子の波長は $\lambda = \frac{h}{p}$ …① である。ボーアの水素原子模型に当てはめると、電子の円運動の向心

力が陽子と電子のクーロン力によるから $m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$ より、 $r = \frac{k e^2}{m v^2}$ …② が成立する。電子

の波長が $\lambda = \frac{h}{m v}$ である。定在波になる条件 $2\pi r = n\lambda$ (n を自然数) より $2\pi r = \frac{n h}{m v}$ が

成立するから $r = \frac{n h}{2\pi m v}$ …③ である。②、③より、 n 番目の軌道上をまわる電子の速さは

$v = \frac{2\pi k e^2}{n h}$ …④、軌道の半径は $r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m k e^2}$ …⑤ である。 n 番目の軌道の運動エ

ネルギー $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{n^2 h^2}$ と位置エネルギー $U = -k \frac{e^2}{r} = -\frac{4\pi^2 m k^2 e^4}{n^2 h^2}$ の和、す

なわち全エネルギー $E_n = -\frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{n^2 h^2}$ …⑥ である。 $n+1$ 番目と n 番目のエネルギー

の差 $E_{n+1} - E_n$ は、 $E_{n+1} - E_n = \frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$ …⑦ である。

ここまでは教科書とまったく同じだ！ ここからが合否の分かれ目 (ボーア理論の考え方を応用)

同じ考えを使えばよい。位置エネルギーが $V(r) = \frac{1}{2} C r^2$ (C は正の定数) とするとき、電子

が受ける力は $f(r) = \frac{dV(r)}{dr} = C r$ (フックの法則 $f = kx$ と同じ一次式) だから

$m \frac{v^2}{r} = C r$ が成立するから $v = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot r$ …⑧、また、定在波条件 $2\pi r = \frac{n h}{m v}$ を組み合わ

せて $v^2 = \frac{n h}{2\pi m} \sqrt{\frac{C}{m}}$ 、 $r^2 = \frac{n h}{2\pi C} \sqrt{\frac{C}{m}}$ が得られる。 n 番目の軌道の運動エネルギーは

$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{n h}{4\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}$ 、位置エネルギーは $U = \frac{1}{2} C r^2 = \frac{n h}{4\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}$ であるから、全エネルギー

は $E_n = \frac{n h}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}$ …⑨ である。

また、位置エネルギーが $V(r) = f r$ で与えられる場合、同様にして電子が受ける力は

$f(r) = \frac{dV(r)}{dr} = f$ と一定の力である。同様にして $m \frac{v^2}{r} = f$ 、 $2\pi r = \frac{n h}{m v}$ の2式より、

$v = \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ 、 $r = \frac{n h}{2\pi m} \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{-\frac{1}{3}}$ である。 n 番目の軌道の運動エネルギーは

$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{\frac{2}{3}}$ 、位置エネルギーは $U = f r = \frac{n f h}{2\pi m} \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{-\frac{1}{3}} = m \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{\frac{2}{3}}$ だから、

全エネルギーは $E_n = \frac{3 m}{2} \left(\frac{n f h}{2\pi m^2} \right)^{\frac{2}{3}}$ …⑩ である。