**入試問題研究 第145回 2005年 早稲田大学 ① 気体の分子運動論**

Ⅰ 以下の問いに答えよ。 ※ 選択肢省いています。

質量 $m$ の分子 $N$ こからなる気体が、熱を通さない一辺 $L$ の立方体容器に閉じ込められて、絶対温度 $T$ の状態になるとする。分子は容器の壁と跳ね返り係数1の弾性衝突をする質点とみなすことにしよう。分子に $j=1,2,3,\cdots,N$ と番号をつけ、ある時刻 $t_0$ における $j$ 番目分子の速度の $x, y, z$ 成分をそれぞれ $u_j$ , $v_j$ , $w_j$ とし、ボルツマン定数を $k$ とする。

問1 一つの分子が何度も壁と衝突するほど長い時間 $\Delta t$ を考えよう。分子同士の衝突を無視するとき、時刻 $t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間に $j$ 番目の分子が $x$ 軸に垂直な壁面(図1の面ABCD)と衝突する回数はいくらか。

問2 次に時刻 $t_0$ から時間 $\Delta t$ をかけ、一定の速さで面ABCDを $x$ 軸の正の方向に $\Delta x$ だけ動かそう(図2参照)。分子が動く壁面ABCDと衝突すると、衝突の前後で分子速度の $x$ 成分は変化する。 $j$ 番目の分子が始めて面ABCDに衝突する際のエネルギー変化 $\Delta e_j$ はいくらか。

問3 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ が分子の速さ $\sqrt{u_j^2+v_j^2+w_j^2}$ に比べ十分小さいと、 $j$ 番目分子のエネルギーは壁との衝突のたびに問2で求めた $\Delta e_j$ の値だけ変化すると考えてよく、さらに $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$ が含まれる項を無視できる。このとき、壁が $\Delta x$ だけ移動することによる気体のエネルギー変化 $\Delta U$ はいくらか。

問4 問2で考えた過程では、壁の移動により直接影響を受けるのは分子速度の特定の成分だけだが、分子同士の衝突により、分子速度の $x$ 成分 $u_j$ 、$y$ 成分 $v_j$ 、$z$ 成分 $w_j$ も変化し、それぞれの2乗平均は常に等しいと考えられる: $\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j^2=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_j^2$ 、さらに、容器は熱を通さないので、 $\Delta U$ は体積変化にともなって圧力がした仕事になる。このとき、分子速度の $x$ 成分の2乗平均 $\overline{u^2}=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j^2$ の値はいくらか。

以下の問で必要があれば、理想気体で成立する次式を用いよ。速度の $y$ 成分、$z$ 成分でも同様である。

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|u_j|=\sqrt{\frac{2\overline{u^2}}{\pi}} \text{、} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|u_j|^3=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\overline{u^2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{、} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j=0 \text{、} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^3=0 \text{、} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^4=3\left(\overline{u^2}\right)^2$$

問5 時間 $\Delta t$ の間に面ABCDに衝突する分子の延べ数(平均衝突回数と分子数の積)はいくつか。

問6 図3のように、面ABCD上に面積 $S$ の小領域をとる。分子が一様に面ABCDに衝突すると考えると、 $\Delta t$ の間に小領域に衝突する分子数はいくらか。

問7 気体が希薄で、小領域の面積 $S$ が小さいと時間 $\Delta t$ の間に同一分子が小領域に2回以上衝突することはない。容器の外を真空にし、小領域に穴を開けると、そこに衝突するはずだった分子は容器の外部に放出される。単位時間あたりに小穴から放出される分子数を温度 $T$ と圧力 $p$ を含む式で表すとどうなるか。

問8 図4のように多数の小穴を持つ壁で容器が二分され、同一の希薄な気体が入っている。前問で考えた機構により分子は小穴を通り左右に移動すると考えられる。左側の気体の圧力が $1.0\times10^5$ Pa 、絶対温度が 300 K のとき、右側の気体の圧力を $1.2\times10^5$ Pa 、絶対温度を $T_R$ にしたところ、容器の右側から左側に移動する分子数と、左側から右側に移動する分子数が同数になった。 $T_R$ はいくらか。

問9 分子は、静止しているとき、固有の波長 $\lambda$ の光を発するとしよう。気体温度が非常に高い場合に、図5のように気体から $z$ 軸の正の方向に発せられる光の波長を測定する。このとき、 $j$ 番目の分子から発せられる光の波長 $\lambda_j$ は分子運動のため $\lambda$ とは異なる。これは、動く音源から出る音

の示す現象と同様であり、分子の速さが光速 $c$ よりはるかに小さいので、その波長の変化は音に適用される公式を用いて計算できる。 $\lambda_j$ はいくらか。

問１０ 問９で調べたように分子が発する光の波長は、運動のため変化する。そこで、気体から発せられる光の波長の散らばり具合を調べることにより、分子が様々な速さで運動していることを確認できる。光の波長の散らばり具合は、平均の波長を $\bar{\lambda}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j$ とすると、 $\delta\bar{\lambda}^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j-\bar{\lambda})^2$ で表すことができる。 $\delta\bar{\lambda}^2$ はいくらか。

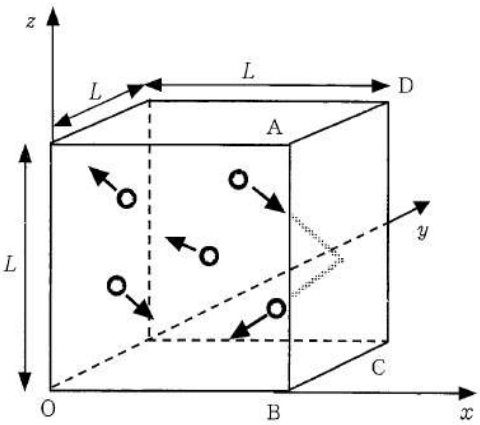


図１

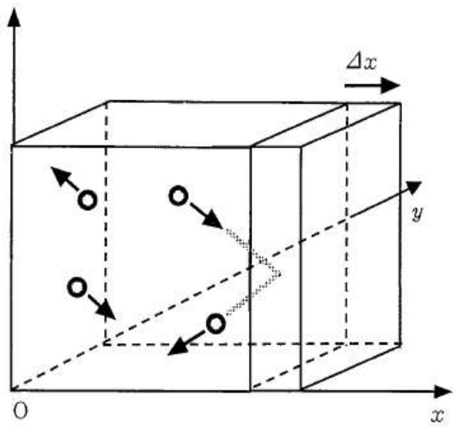


図２

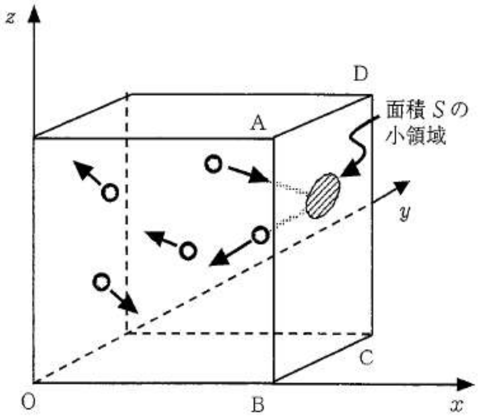


図３

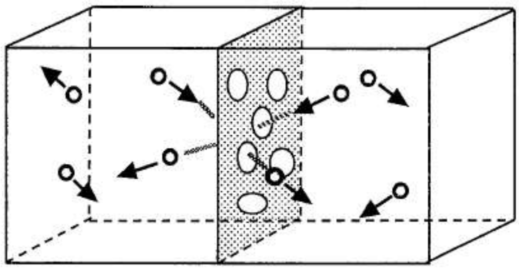

図４

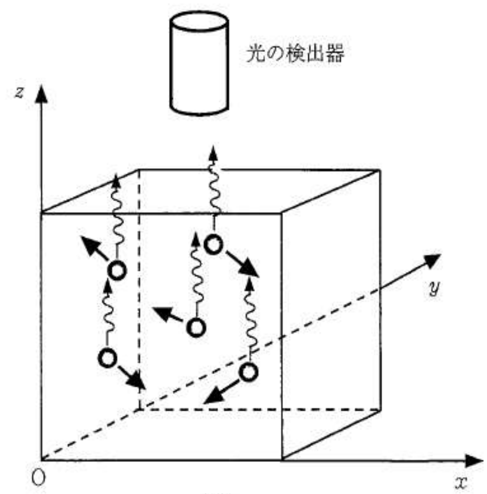


図５

**入試問題研究 第145回 2005年 早稲田大学 ① 気体の分子運動論　解答・解説**

**※　気体の分子運動論の考え方を使って、断熱変化を扱っている問題。**

壁が動かない場合が基本の考え方の部分（教科書通り）。質量 $m$ の分子 $N$ こからなる気体が、熱を通さない一辺 $L$ の立方体容器に閉じ込められて、絶対温度 $T$ の状態になるとする。分子は容器の壁と弾性衝突をする質点とみなす。ここで、分子に $j=1,2,3,\cdots,N$ と番号をつけ、ある時刻 $t_0$ における $j$ 番目分子の速度の $x, y, z$ 成分をそれぞれ $u_j$ ， $v_j$ ， $w_j$ とし、ボルツマン定数を $k$ とする。1分子が1回衝突すると、 $-2mu_j$ の運動量が変化 → そのような運動が $\Delta t$ 間に $\dfrac{u_j\Delta t}{2L}$ 回衝突 → 壁に与える力積は $2mu_j\times\dfrac{u_j\Delta t}{2L}$ → 全分子では $\dfrac{m\Delta t}{L}\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ の力積 → 力積は $f\Delta t$ だから、壁面が受ける力は $\dfrac{m}{L}\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ → 面積で割ると圧力になり $p=\dfrac{m}{L^3}\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ である。

また、ボルツマン定数 $k=\dfrac{R}{N_A}$ だから、 $T=\dfrac{m}{Nk}\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ でもある。

問1　一つの分子が $x$ 軸方向に1往復（ $2L$ ）進むと1回衝突する。分子は $\Delta t$ 秒間に進む距離は $|u_x|\Delta t$ だから、時刻 $t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間に $j$ 番目の分子が $x$ 軸に垂直な壁面（図1の面ABCD）と衝突する回数は $\dfrac{|u_j|\Delta t}{2L}$ である。

問2　$u_0=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ とし、弾性衝突の条件に代入すると、 $1=-\dfrac{u_j'-u_0}{u_j-u_0}$ が成立する。これを静止して衝突後の速度は $u_j'$ を求めると、 $u_j'=-|u_j|+2u$ である。

よって、運動エネルギーの変化は $\Delta e_j=\dfrac{1}{2}m\left\{(-|u_j|+2u)^2+{v_j}^2+{w_j}^2\right\}-\dfrac{1}{2}m\left\{{u_j}^2+{v_j}^2+{w_j}^2\right\}$ であるので $\Delta e_j=2m\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2-2m|u_j|\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ になる。

問3　$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ が分子の速さ $\sqrt{u_j^2+v_j^2+w_j^2}$ に比べ十分小さいと、 $j$ 番目分子のエネルギーは壁との衝突のたびに問2で求めた $\Delta e_j$ の値だけ変化すると考えてよいので、 $j$ 番目の分子のエネルギー変化は $\Delta e_j\cdot\dfrac{|u_j|\Delta t}{2L}=-\dfrac{m|u_j^2|\Delta x}{L}$ である。全ての分子について合計して気体のエネルギー変化を求めると $\Delta U=-\dfrac{m\Delta x}{L}\cdot\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ である。なお、これは $\Delta U=-\left(\dfrac{m}{L^3}\cdot\sum_{j=1}^{N}u_j^2\right)\cdot L^2\Delta x$ とも書け、ここで $\left(\dfrac{m}{L^3}\cdot\sum_{j=1}^{N}u_j^2\right)=p$ 、 $L^2\Delta x=\Delta V$ より、 $\Delta U=-p\Delta V$ のことを表していることになる。

問4 → $L^3=V$ だから $pV=m\sum_{j=1}^{N}u_j^2$ である。状態方程式 $pV=\dfrac{N}{N_A}RT$ 、ボルツマン定数 $k=\dfrac{R}{N_A}$ だから、 $\overline{u^2}=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^2=\dfrac{kT}{m}$ である。

以下の問で必要があれば、理想気体で成立する次式を用いよ。速度の $y$ 成分、$z$ 成分でも同様である。

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|u_j|=\sqrt{\frac{2\bar{u^2}}{\pi}}、\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|u_j|^3=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\bar{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}、\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j=0、\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^3=0、\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^4=3\left(\bar{u^2}\right)^2$$

問５　$j$ 番目の分子が $x$ 軸に垂直な壁面 ABCD と衝突する回数は $\dfrac{|u_j|\Delta t}{2L}$ である（問 1）。よって、時間 $\Delta t$ の間に面 ABCD に衝突する分子の延べ数は $\dfrac{\Delta t}{2L}\cdot\sum_{j=1}^{N}|u_j|$ である。

問６　分子が一様に面 ABCD に衝突すると考えると、小領域に衝突する分子数は問５の $\dfrac{S}{L^2}$ 倍になる。よって、$\Delta t$ の間に小領域に衝突する分子数は $\dfrac{S\Delta t}{2L^3}\cdot\sum_{j=1}^{N}|u_j|$ である。

問７　衝突する分子数が容器の外部に放出される。単位時間あたりに小穴から放出される分子数は $\dfrac{S}{2L^3}\cdot\sum_{j=1}^{N}|u_j|$ より $\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|u_j|=\sqrt{\dfrac{2\bar{u^2}}{\pi}}$ を代入し $\dfrac{NS}{2L^3}\sqrt{\dfrac{2\bar{u^2}}{\pi}}$ である。 $p=\dfrac{m}{L^3}\sum_{j=1}^{N}u_j^2=\dfrac{mN}{L^3}\bar{u^2}$ を使って $L$ を消去して $\dfrac{pS}{2m\bar{u^2}}\sqrt{\dfrac{2\bar{u^2}}{\pi}}$ になる。続いて $\bar{u^2}=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^2=\dfrac{kT}{m}$ を代入すれば最後だ。

$\dfrac{pS}{2m}\sqrt{\dfrac{2m}{\pi kT}}=\dfrac{pS}{\sqrt{2\pi mkT}}$ より、単位時間あたりに放出される分子数は $\dfrac{pS}{\sqrt{2\pi mkT}}$ である。

問８　問７の結果を使って $\dfrac{1.0\times10^5 S}{\sqrt{2\pi mk\times300}}=\dfrac{1.2\times10^5 S}{\sqrt{2\pi mkT_R}}$ が成立する。これより、$\dfrac{1.0}{\sqrt{300}}=\dfrac{1.2}{\sqrt{T_R}}$ であるので、$T_R=1.2^2\times300=432$ K のとき、つりあって分子の見かけの移動（変化）は無くなる。

問９　分子は、静止しているとき、固有の波長 $\lambda$ の光を発するとしよう。$j$ 番目の分子から発せられる光の波長 $\lambda_j$ は分子運動のためドップラー効果で $\lambda$ とは異なる。ドップラー効果の公式に代入して $\dfrac{c}{\lambda_j}=\dfrac{c}{\lambda}\cdot\dfrac{c}{c-w_j}$ だから $\lambda_j=\left(1-\dfrac{w_j}{c}\right)\cdot\lambda$ である。

なお、$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j=N\lambda-\dfrac{\lambda}{c}\sum_{j=1}^{N}w_j=N\lambda$ より、平均波長は $\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j=\lambda$ となり、固有の波長に等しい。

問 10　分子はいろいろな速度で動いているので分子から発せられる光の波長は光の波長に散らばりが出てくる。この散らばり具合を調べることにより、分子が様々な速さで運動していることを確認できる。

よって、光の波長の散らばり具材は $\delta\bar{\lambda}^2=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j-\bar{\lambda})^2=\dfrac{\lambda^2}{Nc^2}\sum_{j=1}^{N}w_j^2$ である。分子の速度の２乗平均は $\bar{u^2}=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}u_j^2=\dfrac{kT}{m}$ だから、波長の散らばり具合は $\delta\bar{\lambda}^2=\dfrac{\lambda^2 kT}{mc^2}$ と表される。

**※ 波長の散らばり具合を観測することで気体の温度が分かるのだ！ 遠くて行けないところの温度を知ることができるのだね。**