入試問題研究 第146回　2005年 早稲田大学　② 力学

以下の問の答えを解答用紙の該当欄に記入せよ。

図１のように、質量 m の物体Ａが水平な床に置かれた質量 M の平板上の台Ｂに乗っている。台Ｂをうまく動かして、物体Ａを思うような位置に移動させよう。ただし、物体Ａと台Ｂの接触面は粗く、摩擦力が働くが、台Ｂと床の接触面は滑らかで、摩擦力は働かないとする。重力加速度を g として、以下の問に答えよ。

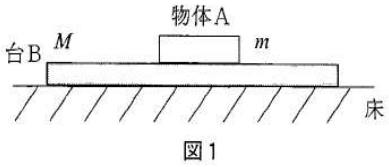

図1

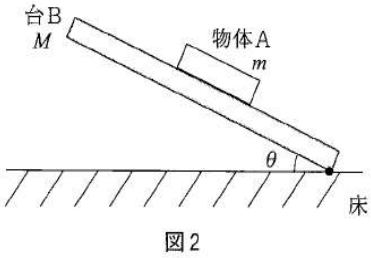

図2

問１　図２に示すように台Ｂの一端を床に固定し、台Ｂを静かに傾けて行く。台Ｂと床の角度が θ になったとき、物体Ａが滑り始めた。そして、台Ｂの上を長さ l だけすべるのに要した時間は t_0 であった。物体Ａと台Ｂの間の静止摩擦係数を μ と動摩擦係数 μ' を求めよ。

以下の問で摩擦係数が必要な場合は、静止摩擦係数として μ 、動摩擦係数として μ' を使って答えよ。

問２　台Ｂ上で物体Ａを移動させるため、図３に示すように台Ｂを水平にもどし、一定の力を加えて動かした。力がある大きさを超えたところ、物体Ａは台Ｂ上をすべり始めた。このときの力の大きさを求めよ。

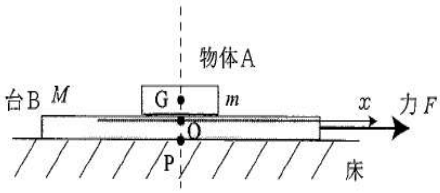

図3

以下の問いでは、図３に示すように台Ｂに固定した x 座標軸を考え、物体Ａの位置はその重心Ｇの x 座標を使って考えよ。

問３　いま、x 座標軸の原点Ｏと物体Ａの重心Ｇは床上の点Ｐにあり、物体Ａ、台Ｂは共に静止していたとする。このとき、時刻 $t=0$ で問２で求めた力より大きい力 F を x 軸の正方向に加えて台Ｂを動かした。重心Ｇの台Ｂに対する相対運動の加速度を求めよ。

問４　問３の状態において、時刻 $t=T$ で台Ｂに加える力を０にした。その後、しばらくして、物体Ａは台Ｂに対して静止した。このときの台Ｂの速度および時刻 $t=T$ から静止するまでの時間を求めよ。さらに、物体Ａの重心Ｇの位置座標はどのように表されるか。

ここで、物体Ａの位置を移動させる操作について考える。問３と問４の操作の後、物体Ａの位置は台Ｂ上で移動している。そこで、台Ｂをうまく出発点までもどせば、物体Ａの位置だけを変えられる。台Ｂに対して物体Ａを静止させたまま座標軸の原点を点Ｐにもどすには、そのための力が問２で求めた大きさを超えなければよい。この一連の操作を繰り返すと、物体には直接力を加えることなくその位置だけを任意に移動させることができる。このような装置は、慣性駆動装置とよばれ、物体の位置を精密に制御するのに用いられている。以下で、この装置の動作について調べてみよう。

問５　力 F を加える時間 T を力積 FT が一定になるようにしながら短くしていった極限を考える。共に静止した状態にある物体Ａ、台Ｂの組を考え、台Ｂに瞬間的な力を加えると、物体Ａおよび台Ｂは運動を始めた。しばらくして、物体Ａは問４で述べたように台Ｂに対して静止した。このときの物体Ａの重心Ｇの位置座標を求めよ。

その後、問２で求めた力の大きさより小さな一定の力を加えて台Ｂの動きを止め、さらに点Ｆに戻すために同じ一定の力で台Ｂの動きをとめ、さらに点Ｐにもどすために同じ一定の力で台Ｂを反対方向に加速し、ちょうど座標原点が点Ｐに戻ったときに台Ｂの速度が０になるように減速したとしよう。

問６　問５からの一連の操作で台Ｂに加えた力のした仕事はいくらか。

入試問題研究　第146回　2005年　早稲田大学　② 力学　解答･解説

※ 問1、2は誰でも出来る基本問題で、合否を決める勝負問題は問3からになる。

問1　台に沿った方向の力を考える。静止摩擦力は重力による成分　$mg\sin\theta$　とつりあう。静止摩擦力は最大摩擦力を超えないので　$mg\sin\theta<\mu mg\cos\theta$　の関係が成立する。よって、静止摩擦係数は　$\mu=\tan\theta$　である。**※ どの問題集にもある「摩擦角」の基本問題。**

滑り出してからは動摩擦力になり、物体Aの運動方程式は　$ma=mg\sin\theta-\mu' mg\cos\theta$　になる。よって、加速度は　$a=g\cos\theta(\tan\theta-\mu')$　である。　l　だけすべるのに時間が　t_0　かかるので、等加速度運動の公式より　$\frac{1}{2}\cdot g\cos\theta(\tan\theta-\mu')\cdot t_0^2=l$　だから、動摩擦係数は　$\mu'=\tan\theta-\frac{2l}{gt_0^2\cos\theta}$　。

問2　台Bに加える力を　F　を加えたとき、台上で物体Aが動かない場合、静止摩擦力　f　が働いているとする。物体Aの運動方程式は　$ma=f$　･･･①、台の運動方程式は　$Ma=F-f$　･･･② の2式が成立する。これを解くと　$a=\frac{F}{m+M}$　、　$f=\frac{mF}{m+M}$　である。滑らないためには、「静止摩擦力が最大摩擦力を超えない」条件を満たす。よって、　$f=\frac{mF}{m+M}<\mu mg$　だから　$F<\mu(m+M)g$　である。よって滑り出すのは、台Bを引く力が　$F=\mu(m+M)g$　になったときだ。

問3　問2で求めた力より大きい力　F　をx軸の正方向に加えて台Bを動かしたときの運動を考えてみる。運動方程式は、物体Aが　$ma=\mu' mg$　･･･①、台Bが　$MA=F-\mu' mg$　･･･② である。よって　$a=\mu' g$　･･･③、　$A=\frac{F-\mu' mg}{M}$　･･･④である。物体Aの重心Gの台Bに対する相対運動の加速度は、　$\mu' g-\frac{F-\mu' mg}{M}=\frac{\mu'(m+M)g-F}{M}$　である。

問4　時刻　$t=T$　のときの速度は、物体Aが　$v_T=\mu' gT$　、台が　$V_T=\frac{F-\mu' mg}{M}T$　である。

$t=T$　以降は、外力が働かないので、運動量保存の法則する。台の上で止まったときの速度を　V'　とすると　$mv_T+MV_T=(m+M)V'$　である。よって、その速度は　$V'=\frac{FT}{m+M}$　である。

止まるまで物体Aは台上を左に進む。、動摩擦力は右向きだから、運動方程式は　$ma'=\mu' mg$　、$MA'=-\mu mg$　より、加速度は、物体Aが　$a'=\mu' g$　、台Bが　$A'=-\frac{m}{M}\mu' g$　である。等加速度運動の公式　$V'=v_T+\mu' gt$　より、台の上で止まるまでの時間は　$t=T\left\{\frac{F}{\mu'(m+M)g}-1\right\}$　である。

滑った距離は、初めから動いた距離の差だから、v-t図の面積の差より、　$\frac{1}{2}(V_T-v_T)(T+t)$　だから　$\left\{\frac{FT}{2\mu'(m+M)g}\right\}\left(\frac{F-\mu'(m+M)g}{M}T\right)$　左に滑るので　$x=-\frac{F\{F-\mu'(m+M)g\}}{2\mu' M(m+M)g}\cdot T^2$　である。

問5　力　F　を加える時間　T　を力積　$FT=k$　（k一定）になるようにしながら短くしていった極限を考える。　$x=-\frac{FT\{FT-\mu'(m+M)gT\}}{2\mu' M(m+M)g}=-\frac{k\{k-\mu'(m+M)gT\}}{2\mu' M(m+M)g}=-\frac{k^2}{2\mu' M(m+M)g}$　だから、この1回の操作で、物体Aの重心Gの位置座標は　$x=-\frac{F^2T^2}{2\mu' M(m+M)g}$　である。

問6　一連の操作で台Bに加えた力がした仕事は摩擦力×滑った距離だから、　$W=fx$　に代入して　$\mu' mg\times\left\{-\frac{F^2T^2}{2\mu' M(m+M)g}\right\}=-\frac{F^2T^2}{2M(m+M)}$　である。