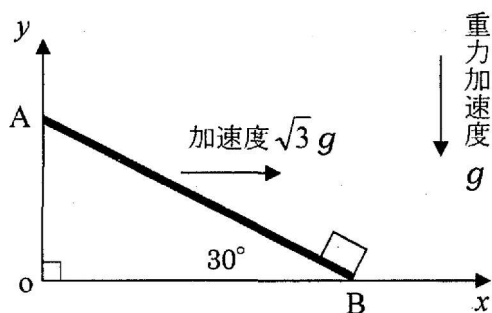


入試問題研究 第147回 2005年 慶応大学 医 ② 力学

Ⅱ 以下の文章の①～⑤の空欄にはいる数式を答えよ。

水平な地面から 30° 傾けた長さ L の板の AB の下端に、大きさが無視できる質量 M の物体が静止している。いま、傾きを保ったまま、重力加速度 g の $\sqrt{3}$ 倍の一定の加速度で板が水平右向きに動き始めた。静止状態のときに上端 A から地面に下ろした垂線の足を原点 o とし、水平右向きに x 軸、垂直上向きに y 軸をとる。板と物体との間に摩擦はないものとする。



板の上端 A を飛び出した物体が地面に落下する位置を求めたい。板が動き始めてから物体が板の上端 A に達するまでの時間は ① であり、このときの上端 A と原点 o との水平距離は ② である。物体が上端 A を飛び出すときの速度ベクトルを x , y 成分表示すると ③ となる。物体が、上端 A を飛び出して地面に落下するまでの時間は ④ であるから、物体は原点 o から ⑤ 離れた地点に落下することがわかる。

入試問題研究 第147回 2005年 慶応大学 医 ② 力学 解答・解説

II 板から見た物体の運動と、床から見た物体の運動を使い分けるテクニックだけの基本問題である。

板から見た物体の運動の場合は慣性力を忘れない(常識!)。また、床から見た物体の運動のときは、相対速度から絶対速度への変換操作が必要となる。

板から見た物体の運動を考える。物体には x 軸負の向きに $\sqrt{3}Mg$ の慣性力、 y 軸負の向きに重力 Mg がかかる。物体に働く力の板に平行な力の成分は、斜面上向きを正として、慣性力が $\sqrt{3}Mg \cos 30^\circ$ 、重力が $-Mg \sin 30^\circ$ であるから、運動方程式は $Ma = Mg$ より、加速度は g になる。物体は板の上を等加速度運動を行うので、等加速度運動の公式を使うだけだ。

板が動き始めてから物体が板をさかのぼり板の上端 A に達するまでの時間 t_1 とすると、等加速度運動の公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ を適用すると $L = \frac{1}{2} g t_1^2$ が成立するから $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ ……①

である。この間に板が床上を動く距離(上端 A と原点 o との水平距離)は $x_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} g \cdot t_1^2$ だから、その距離は $x_1 = \sqrt{3} L$ ……② である。※ ここまでは誰でも解ける。次からが勝負問題だ!

物体が上端 A を飛び出すときの板から見た速度は $v_1 = g t_1 = \sqrt{2gL}$ である。ベクトルで表示すると $\vec{v}_1 = (-\sqrt{2gL} \cos 30^\circ, \sqrt{2gL} \sin 30^\circ)$ である。板の速度は $v_2 = \sqrt{3} g \cdot t_1 = \sqrt{6gL}$ であり、ベクトルで表示すると $\vec{v}_2 = (\sqrt{6gL}, 0)$ ……③ となる。よって、「床から見た物体の速度」=「板から見た速度」+「板の速度」である。よって、これをベクトルで表示すると $\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ であるので $(\sqrt{6gL} - \sqrt{2gL} \cos 30^\circ, \sqrt{2gL} \sin 30^\circ)$ だから、初速度 $(v_x, v_y) = (\frac{\sqrt{6gL}}{2}, \frac{\sqrt{2gL}}{2})$ の斜方投射運動となって落下する。

鉛直方向成分(y 成分)は等加速度運動の公式を適用して $-\frac{1}{2}L = v_y \cdot t_2 - \frac{1}{2}g t_2^2$ を満たす時刻 t_2 で床に落下する。整理して $g t_2^2 - \sqrt{2gL} t_2 - L = 0$ より $t_2 = \frac{\sqrt{2gL} \pm \sqrt{6gL}}{2g}$ だから、板から飛び出してから床に落下するまでの時間は $t_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$ ……④ である(負の解は不適解になる)。

物体の水平方向(x 成分)の移動は $x_2 = v_x t_2 = \frac{\sqrt{6gL}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} \cdot L$ さらに進む。

よって、飛び出す前の移動分 $x_1 = \sqrt{3} L$ とあわせて、 $x_1 + x_2 = \frac{3(1 + \sqrt{3})}{2} \cdot L$ になる。よって、物体は原点 o から $\frac{3(1 + \sqrt{3})}{2} \cdot L$ ……⑤ 離れた地点に落下する。