

入試問題研究 第151回 2005年 北海道大学 ① 力学

I 次の文章の の中に適切な数式、または数値を入れよ。

図1に示すような重力を利用して小球を水平に投げ出す投てき装置を考える。半径 r [m] の円板を外周には伸び縮みしない糸が巻かれており、その糸の端には質量 M [kg] のおもりが取り付けられて十分深い溝につり下げられている。また、円板の中心から距離 r [m] の位置に質量 m [kg] の小球が受けられている。

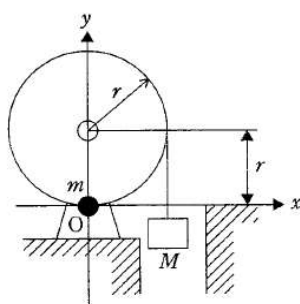


図1

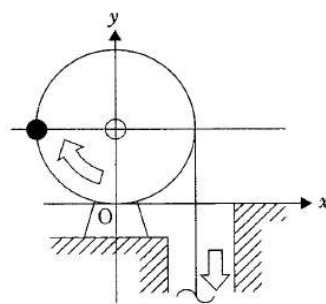


図2

円板と糸の質量は無視できるものとし、円板は中心軸まわりに摩擦なく回転できるものとする。また、おもりと小球には鉛直下向きの重力が働いており重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

問1 小球が最下点で静止しているときの位置を初期位置とし、おもりを落下させて円板を時計回りに回転させる。図2のように円板が4分の1回転して小球が最左点に達するとき、おもりは初期位置から ① [m] だけ下がり、おもりの位置エネルギーは ② [J] だけ減少する。これが、小球の位置エネルギーの増加分 ③ [J] と、おもりの運動エネルギー、小球の運動エネルギーに変わる。このときの円板の角速度の大きさを力学的エネルギー保存の法則によりもとめると ④ [rad/s] となる。また、最左点より高い位置に達するためには、おもりと小球の質量の間に $\frac{m}{M} < \text{⑤}$ が成り立つことが必要である。

以下、おもりの質量が小球の質量の2倍 ($M=2m$) の場合を考える。

問2 小球が最下点から回転し始め、図3で示すように最上点に達したとき、小球に働く遠心力の大きさは ⑥ [N] となる。最上点で小球を円板から離すと、点線で示すように、小球は水平方向に速さ ⑦ [m/s] で飛び出し、飛び出してから時間 ⑧ [s] 後に $x = \text{⑨}$ [m] の点Pで地面に落下する。

問3 この投てき装置においては、糸の張力は小球に対して常に円板外周の接線方向に作用し、その大きさは一定ではない。最下点で小球が回転を始めた直後の糸の張力は ⑩ [N]、小球が最左点に達する瞬間の糸の張力は ⑪ [N] である。小球が運動を始めて最上点で小球を離すまでの間に、糸の張力が円板の運動を介して小球に対して行った仕事は ⑫ [J] となる。

入試問題研究 第151回 2005年 北海道大学 ① 力学 解答・解説

問1 図2のように円板が4分の1回転して小球が最左点に達するとき、おもりは初期位置から

$$\frac{\pi r}{2} \cdots \textcircled{1} [\text{m}] \text{ だけ下がり、おもりの位置エネルギーは } \frac{\pi M g r}{2} \cdots \textcircled{2} [\text{J}] \text{ 減少する。これ}$$

が小球の位置エネルギー増加分 $m g r \cdots \textcircled{3}$ 、おもりの運動エネルギー、小球の運動エネルギーに変わる。円板の角速度を ω [rad/s] とすると、小球とおもりの速さは $r \omega$ [m/s]

である。力学的エネルギー保存の法則を適用して $-\frac{\pi M g r}{2} + m g r + \frac{1}{2}(M+m)(r \omega)^2 = 0$ が

$$\text{成立するから } \omega = \sqrt{\frac{(\pi M - 2m)g}{(M+m)r}} \cdots \textcircled{4} \text{ である。また、最左点より高い位置に達するために}$$

は、 $\textcircled{4}$ が正であればよいから、おもりと小球の質量の間に $\frac{m}{M} < \frac{\pi}{2} \cdots \textcircled{5}$ である。

問2 小球が最上点に達したときの角速度の大きさを ω [rad/s] として、エネルギー保存の法

則を適用すると $-\pi M g r + 2 m g r + \frac{1}{2}(M+m)(r \omega)^2 = 0$ が成立する。これより小球の角速

$$\text{度は } \omega = \sqrt{\frac{2(\pi M - 2m)g}{(M+m)r}} \text{ である。小球に働く遠心力の大きさは } m r \omega^2 \text{ であるので、これ}$$

$$\text{を代入して } \frac{2(\pi M - 2m)m g}{M+m} \text{ となる。 } M=2m \text{ だから } \frac{4(\pi-1)m g}{3} \cdots \textcircled{6} \text{ となる。}$$

$$\text{最上点で小球は水平方向に速さ } v_0 = r \omega = 2 \sqrt{\frac{(\pi-1)g r}{3}} \cdots \textcircled{7} [\text{m/s}] \text{ で飛び出す。}$$

$$\text{高さ } 2r \text{ の水平投射だから、等加速度運動の公式 } 2r = \frac{1}{2} g t^2 \text{ より、 } t = 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \cdots \textcircled{8} \text{ に}$$

$$\text{落下する。また、落下する位置は } x = v_0 t = 4 \sqrt{\frac{\pi-1}{3}} \cdot r \cdots \textcircled{9} \text{ 前方の点Pに落下する。}$$

問3 最下点で小球が回転を始めた直後： 糸の張力 T 、加速度を a とし、運動方程式を作る

$$\text{と、小球が } m a = T, \text{ おもりが } 2 m a = 2 m g - T \text{ である。よって張力は } T = \frac{2 m g}{3} \cdots \textcircled{10} \text{ で}$$

ある。 ※ このとき、小球の重力は運動方向と垂直になり、運動方程式に関与しない

小球が最左点に達する瞬間： 糸の張力 T 、加速度を a とし、運動方程式は、小球が

$$m a = T - m g, \text{ おもりが } 2 m a = 2 m g - T \text{ だから、糸の張力は } T = \frac{4 m g}{3} \cdots \textcircled{11} \text{ である。}$$

最上点で小球が飛び出すとき： 力学的エネルギー保存の法則を使えばよい。

「糸の張力が円板の運動を介して小球にした仕事は、おもりの力学的エネルギーの減少分」だから

$$\pi 2 m g r - \frac{1}{2} \cdot 2 m \cdot \left(2 \sqrt{\frac{(\pi-1)g r}{3}} \right)^2 \text{ である。よって、その仕事は } \frac{2(\pi+2)m g r}{3} \cdots \textcircled{12} \text{ であ}$$

る。