

入試問題研究 第152回 2005年 京都大学 ① 力学

I 次の文章を読んで、には適した式を、には適した数値を、それぞれの解答欄に記入せよ。

図1のように、水平な地表面上に敷かれたレール上を電車が一定の速さ V で動いているとする。このレールは、点 Q の手前で点 O を中心とした半径 R の円弧状であり、点 Q の先では点 Q で円弧に接する直線状となっている。レールの幅、電車の幅、長さ、高さはいずれも、 R に比べて

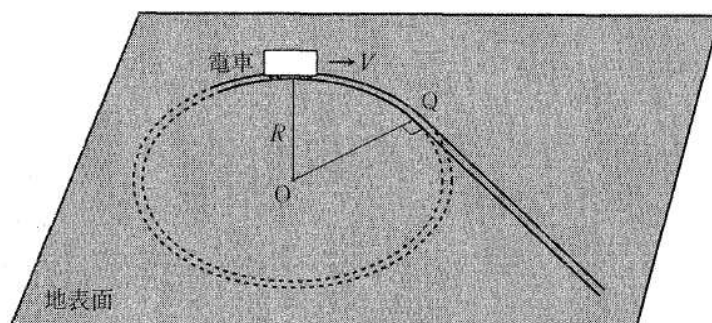


図1

非常に小さいとする。以下の(1)~(3)では電車が円弧状のレール上を動いているときについて、(4)では電車が直線状のレール上を動いているときについて、車内での小物体の運動を考える。ここで、重力加速度の大きさを g とし、小物体の大きさや小物体に対する空気の抵抗はいずれも無視する。

- (1) 電車が点 Q の手前の円弧状のレール上を走っているとき、図2のように、電車の天井の点 S から、質量の無視できる長さ d の糸でつるされた質量 m の小物体は、車内の観測者から見て静止していた。なお、図2はこの電車を進行方向から見たところであり、図の左方向が中心 O の方向である。また、点 A は電車が動いていないときの小物体の静止位置である。このとき、車内の観測者には、車内の小物体に大きさ ア $\text{の遠心力が働いているように見えるので、糸が鉛直線 SA となす角度 } \theta$ は $\tan \theta =$ イ $を満たす。また、糸の張力 } T$ と重力

mg との比は θ のみを用いて、 $\frac{T}{mg} =$ ウ $と表される。$

- (2) 小物体が車内の観測者から見て動いているときでも、その速さが V に比べて十分に小さければ、短い間に電車の加速度運動が小物体へ及ぼす影響は、大きさ ア $の遠心力のみに現れると近似的に考えることができる。以下、この近似を使って考えることにする。この場合、車内の観測者から見て小物体には常に重力と大きさ ア $の遠心力の合力が働くので、あたかも重力加速度の方向と大きさが変化したように見える。$$

この見かけの重力加速度の大きさを g' とすると、 g と

g' の比は θ のみを用いて表すことができ、 $\frac{g'}{g} =$

エ $となる。$

- (3) 小物体を点 A から、車内の観測者から見て速さ u で電車の進行方向に押し出した。その後、小物体は車内の観測者から見て円運動をした。この円運動の半径は d と θ を用い

て表すと オ $である。また、速さ } u$ は d 、 g' 、 θ を用いて表すと $u =$ カ $であり、円運動の周期は } d$ 、 g' 、 θ を用いて表すと キ $となる。$

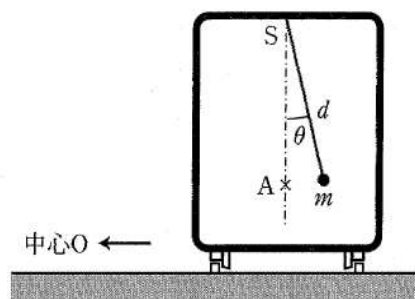


図2

(4) この小物体が(3)のように円運動していてちょうど点 A を通過したときに電車は図 1 のレール上の点 Q を通過し、直線状のレールに速さ V のまま移った。この直線状のレール上を走っているとき、車内の観測者が見ると、図 3 のように、小物体は点 A を中心とする振動をした。この振動におい

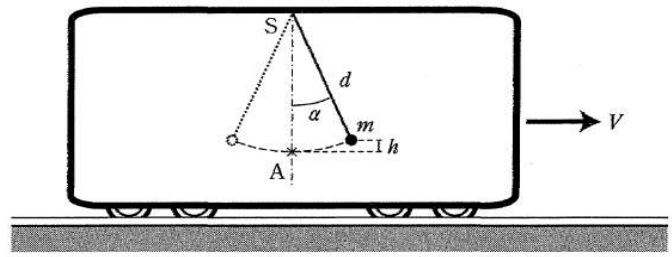


図 3

て、点 A から計った小物体の最高位置の高さ h は u と g を用いて、 $h =$ と表

される。したがって、この振動において糸が鉛直線となす最大の角度を α として、 $\frac{g'}{g} =$

と $u =$ の結果を使って、 $\cos \alpha$ を $\tan \theta$ のみを用いて表すと $\cos \alpha =$

となる。ここで、 α も θ も小さいとして $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ および $\tan \theta \approx \theta$ と近似す

ると、 $\alpha \approx$ $\times \theta$ となる。

入試問題研究 第152回 2005年 京都大学 ① 力学 解答・解説

京都大学の問題としては難しいほうではないので受験生は十分に対応できたであろう。I

- (1) このとき、電車が半径 R 、速さ V の円運動だから、車内の観測者には、車内の小物体に大きさ

$$\frac{mV^2}{R} \cdots \text{ア} \text{ の遠心力 (慣性力的一种) が働いて}$$

いるように見える。糸が鉛直線となす角度 θ は

$$\tan \theta = \frac{V^2}{gR} \cdots \text{イ} \text{ を満たす。糸の張力 } T \text{ と重力}$$

$$mg \text{ との比も } \frac{T}{mg} = \frac{1}{\cos \theta} \cdots \text{ウ} \text{ である (右図)。}$$

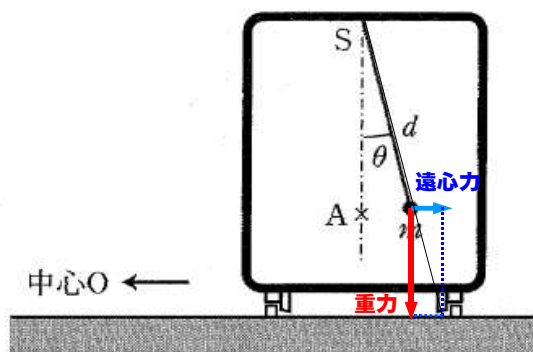


図2

- (2) 車内の観測者から見て小物体には、重力 mg と

遠心力 $\frac{mV^2}{R}$ の遠心力の合力が働き、重力加速度の方向と大きさが変化したように見える。

この見かけの重力は $\sqrt{\left(\frac{mV^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}$ である。加速度の大きさを g' とすると、見かけの

重力は mg' となるので、 $mg' = \sqrt{\left(\frac{mV^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}$ である。よって、 g と g' の比は

$$\frac{mg'}{mg} = \sqrt{\left(\frac{mV^2}{R}\right)^2 + (mg)^2} \div mg \text{ より } \sqrt{\left(\frac{mV^2}{R}\right)^2 + (mg)^2} \div mg = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1} \text{ だから、} \text{エ}$$

を代入して整理すると $\frac{g'}{g} = \frac{1}{\cos \theta} \cdots \text{オ}$ となる。

- (3) 小物体は車内の観測者から見て (等速) 円運動をしたのだから、円運動の半径は d と θ

を用いて表すと $r = d \sin \theta \cdots \text{カ}$ である。また、向心力を考えると $mg' \tan \theta = \frac{mu^2}{r}$ の関

係式を見たすから、これに オ 、 カ を代入して $mg' \tan \theta = \frac{mu^2}{d \sin \theta}$ である。よって、速さ u

は $u = \sqrt{g' d \sin \theta \tan \theta} \cdots \text{キ}$ である。また、円運動の周期は $T = \frac{2\pi r}{u}$ だから、 カ 、 キ を

代入して $T = \frac{2\pi d \sin \theta}{\sqrt{g' d \sin \theta \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{d \cos \theta}{g'}} \cdots \text{ク}$ となる。

- (4) 直線状のレールに速さ V のまま移ったのだから、遠心力はなくなり、車内の観測者が見ると、図3のように、小物体は点Aを中心とする振動 (単振子運動) をした。エネルギー保存の法

則より、 $\frac{1}{2}Mu^2 = Mgh$ だから、 $h = \frac{u^2}{2g} \cdots \text{ケ}$ と表される。したがって、この振動におい

て糸が鉛直線となす最大の角度を α として、 $h = \frac{u^2}{2g} = d - d \cos \alpha$ である。 キ の結果を使っ

て、 $\cos \alpha = 1 - \frac{\tan^2 \theta}{2} \cdots \text{コ}$ となる。ここで、 α も θ も小さいとして $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ およ

び $\tan \theta \approx \theta$ と近似すると、 $\alpha \approx \theta$ となるので $1 \cdots \text{ク}$ である。