入試問題研究　第153回　2005年　東京工業大学　①　力学

図１のように、支点Ｏに一端が固定された長さ R-r のひもに、質量 m のおもりが取り付けられている。支点Ｏを通る鉛直線上、Ｏから下に距離 $R-r$ のところに釘Ｎがあり、おもりが右側に振れると、図２のようにひもが釘に引っかかる。ただし、 $0<r<\frac{R}{2}$ とする。

おもりを、ひもがたるまないように鉛直線ONの左側で静止させる。このとき、ひもと鉛直線のなす角を θ_0 とする。この状態で静かに手を離し、おもりを自由に運動させる。

ひもの質量と伸びは無視できるものとし、支点Ｏや釘Ｎも含めて摩擦はないと仮定する。釘とおもりの大きさは無視できるものとする。重力加速度を g とする。

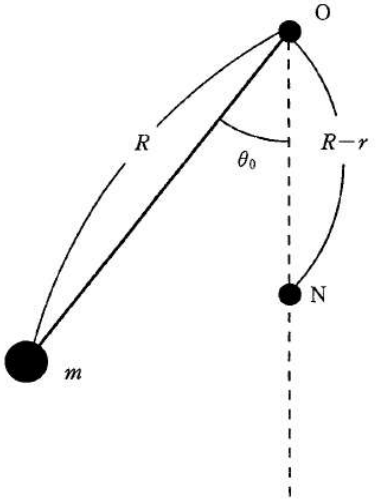

図１

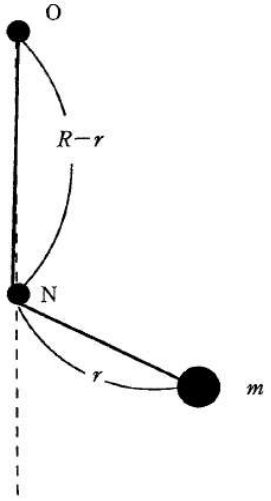

図２

(a)　角 θ_0 が非常に小さいとき、このおもりが初めて元の位置に戻るまでの時間を求めよ。

(b)　一般の（小さいとは限らない）角 θ_0 を考える。手を離してから、おもりが運動し、釘Ｎの真下に来るまで、ひもはたるまないものとする。おもりが釘Ｎに接触する直前と直後のそれぞれについて、支点Ｏが紐から受ける力の大きさを求めよ。

(c)　$r=\frac{R}{8}$ 、 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ の場合を考える。おもりが釘Ｎの右側で、釘Ｎと同じ高さに達したとき、釘がひもから受ける力の向きと大きさを求めよ。

(d)　$\theta_0=\frac{\pi}{3}$ の場合を考える。ひもがたるまないまま、おもりが釘Ｎのまわりを１回転するとき、r が満たす条件を求めよ。ただし、おもりとひもは衝突しないものとする。

入試問題研究　第153回　2005年　東京工業大学　①　力学　　解答・解説

※ 問題集でも良く見かける基本的な問題であり、確実に得点できる力を付けておきたい。

(a)　単振子の周期の公式　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$　を使ウだけの問題。途中に釘があるので、振子の長さが変わるところだけ注意すればよい。

手を離して最下点に達するまでの時間はひもの長さが　R　の単振子の周期の４分の１、右に振れて再び最下点に達するまでの時間はひもの長さが　r　の単振子の周期の２分の１、最下点から元の位置まで戻る時間はひもの長さが　R　の単振子の周期の　θ_0　４分の１である。

合計すると、　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\times\dfrac{1}{4}+2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}\times\dfrac{1}{2}+2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\times\dfrac{1}{4}$　になるので、このおもりが初めて元の位置に戻るまでの時間は　$T=\dfrac{\pi(\sqrt{R}+\sqrt{r})}{\sqrt{g}}$　である。

(b)　最下点でのおもりの速度を　θ_0　とする。エネルギー保存則　$mgR(1-\cos\theta_0)=\dfrac{1}{2}mv_0^2$　より、最下点でのおもりの速度は　$v_0=\sqrt{2gR(1-\cos\theta_0)}$　である。釘に触れる直前は半径　R　の円運動だから、最下点での糸の張力を　S　とすると、向心力の公式より　$S-mg=m\dfrac{v_0^2}{R}$　が成立する。よって、釘にかかる力（糸の張力）は　$m\left(g+\dfrac{v_0^2}{R}\right)$　より、直前の力は　$mg(3-2\cos\theta_0)$　である。また、釘に触れた直後は半径　r　の円運動だから、最下点での糸の張力を　S'　とすると、　$S'-mg=m\dfrac{v_0^2}{r}$　より、釘にかかる力は　$m\left(g+\dfrac{v_0^2}{r}\right)$　より　$\dfrac{mg\{r+2R(1-\cos\theta_0)\}}{r}$　である。

(c)　$r=\dfrac{R}{8}$　、　$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$　の場合を考える。おもりが釘Ｎの右側で、釘Ｎと同じ高さに達したとき、力学的エネルギー保存の法則より　$mg\left\{\dfrac{R}{2}-\dfrac{R}{8}\right\}=\dfrac{1}{2}mv_1^2$　より　$v_1^2=\dfrac{3}{4}gR$　・・・(1)　が成立する。また、向心力の公式より　$T_1=m\dfrac{v_1^2}{r}$　だから、釘にかかる力は、大きさが　$6mg$　（向きは右向き）である。

(d)　$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$　の場合、ひもがたるまないまま、おもりが釘Ｎのまわりを１回転する条件を求める。おもりが鉛直下向きとなす角を　θ　とするときのおもりの速度を　v　とすると、向心力の公式より　$T-mg\cos\theta=m\dfrac{v^2}{r}$　・・・①　が成立する。また、力学的エネルギー保存の法則を適用して、関係式　$mg\left\{\dfrac{R}{2}-r(1-\cos\theta)\right\}=\dfrac{1}{2}mv^2$　・・・②　が成立する。糸がゆるまないための条件は　$T>0$　・・・③　である。以上の①、②より　$mg\{R-2r(1-\cos\theta)\}=r(T-mg\cos\theta$　が得られ、$T=mg\left\{\dfrac{R}{r}-2\right\}+3mg\cos\theta$　である。③の条件より　$mg\left\{\dfrac{R}{r}-2\right\}+3mg\cos\theta>0$　が　θ　に係らず成立すればよい。よって、　$\left\{\dfrac{R}{r}-2\right\}>3$　が成立すればよいから、おもりが釘Ｎの周りを１回転できる条件は　$r<\dfrac{R}{5}$　となる