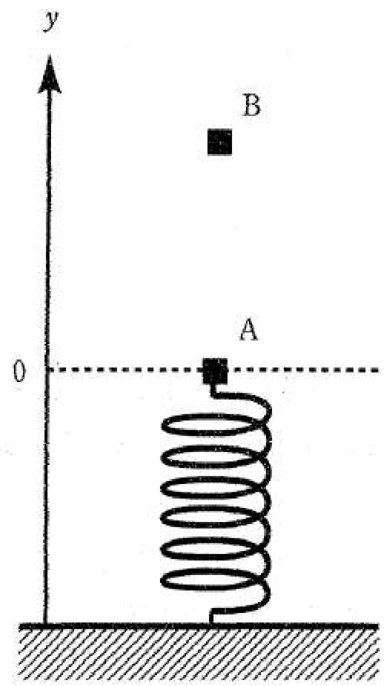
入試問題研究 第155回 2005年 大阪大学 ① 力学



図のように、質量の無視できるばね定数 k の十分に長いばねが鉛直に立てられており、その上に大きさの無視できる質量 m の物体Aが取り付けられている。重力とばねの復元力がつりあっているときの物体Aの位置をy軸の原点($y=0$)とする。ただし、y軸の正の向きを鉛直上向きにとる。物体Aは鉛直方向にのみ動くとして、以下の問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とする。

問１ つりあいの位置でのばねの長さは、自然長よりもある長さだけ短くなっていた。その長さを、k、m、g のうち必要なものを用いて表せ。

最初、物体Aは静止していた。物体Aと同じ質量 m の、大きさの無視できる物体Bを、物体Aの真上の $y=h$ の位置から初速度０で落下させた。物体Bは物体Aと完全非弾性衝突し物体Aと一体となって運動を続けた。この衝突は瞬時に起こり、物体Aと物体Bの全運動量は衝突の直前直後で変わらない。

問２ 一体となった物体の衝突直後の速さ v を、k、m、g、h のうちの必要なものを用いて表せ。

一体となった物体は最下点に達した後、上昇を始め、ある位置になったときに物体Bは物体Aから離れた。衝突してから離れるまでの運動は単振動である。

問３ この単振動の中心のy座標と、単振動の角振動数をk、m、g、h のうちの必要なものを用いて表せ。

この系の力学的エネルギーは、一体となった物体の運動エネルギー、重力による位置エネルギー、ばねに蓄えられている弾性エネルギーの和で与えられる。ただし、重力による位置エネルギーは、y軸原点を基準として測るものとする。

問４ 衝突直後の力学的エネルギー をk、m、g、v のうちの必要なものを用いて表せ。

問５ 最下点のy座標を、k、m、g、h のうちの必要なものを用いて表せ。

物体Ｂが物体Ａから離れる位置を考えてみよう。

問６ 一体となって運動している物体の位置のy座標が y のとき、物体Ｂが物体Ａから受ける抗力の大きさを y、k、m、g、h のうちの必要なものを用いて表せ。

問７ 物体Ｂが物体Ａから離れる位置のy座標をk、m、g、h のうちの必要なものを用いて表せ。

入試問題研究 第155回 2005年 大阪大学 ① 力学　解答･解説

※ 問題集などでも良く見かけるものである。全問正解してほしい問題である。

問１　つりあいの位置でのばねの縮みを d とする。重力とばねの力がつりあい $kd-mg=0$ の関係式が成立するから、はねの縮みの長さは $d=\dfrac{mg}{k}$ である。 **※ 楽勝！**

問２　物体Ｂが衝突するまでに落下する距離は h だから、衝突直前の速さ v_0 とすると、力学的エネルギー保存の法則より $mgh=\dfrac{1}{2}mv_0^2$ が成り立つ。よって、 $v_0=\sqrt{2gh}$ である。

衝突直後の速さを v 、完全非弾性衝突だから運動量保存の法則より $m\sqrt{2gh}=2mv$ が成立する。よって、衝突直後の物体Ａ、Ｂの速さは $v=\dfrac{\sqrt{2gh}}{2}$ である。 **※ 楽勝！**

問３　単振動の中心はつりあいの位置である。このときのばねの縮みを d' とする。つりあいの関係式 $kd'-2mg=0$ が成立する。よって、ばねの縮みは $d'=\dfrac{2mg}{k}$ である。したがって、物体Ａ、Ｂの単振動の中心の y 座標は $y=-\dfrac{mg}{k}$ になる。**※ 楽勝！**

中心から y だけずれた位置での物体Ｂの運動方程式を作る。物体Ｂにかかる力は、重力と抗力だから、 $2ma=k\left(\dfrac{2mg}{k}-y\right)-2mg$ より、加速度は $a=-\left(\dfrac{k}{2m}\right)y$ である。単振動の公式 $a=-\omega^2x$ と比較して、このときの角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ である。 **※ 楽勝！**

問４　衝突直後の力学的エネルギーは、重力による位置エネルギーが $U_G=0$ 、運動エネルギーが $K=\dfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot v^2=mv^2$ 、ばねの弾性エネルギーは $U_S=\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2=\dfrac{m^2g^2}{2k}$ である。

よって、全力学的エネルギーは $U=mv^2+\dfrac{m^2g^2}{2k}$ である。 **※ 楽勝！**

※ これ以降の問題が合否を分ける勝負問題になる！

問５ **いつものように力学的エネルギー保存の法則を使うだけでよい（計算が複雑なだけ）。**

最下点では速さがゼロである。最下点での物体の位置の y 座標を y とすると、重力による位置エネルギーは $U_G'=2mgy$ 、運動エネルギーは $K'=0$ 、ばねの弾性エネルギーは $U_S'=\dfrac{1}{2}k\left(y-\dfrac{mg}{k}\right)^2$ である。力学的エネルギー保存の法則 $mv^2+\dfrac{m^2g^2}{2k}=U_G'+U_S'$ より $\dfrac{mgh}{2}+\dfrac{m^2g^2}{2k}=2mgy+\dfrac{(ky-mg)^2}{2k}$ であるから、この関係式（ y の２次方程式）を解けばよい。展開整理して $ky^2+2mgy-mgh=0$ となるので、２次方程式の解の公式より、 $y=\dfrac{-2mg\pm\sqrt{4m^2g^2+4mghk}}{2k}$ である。最下点は単振動の中心 $y=-\dfrac{mg}{k}$ より上にある

から（ $y=\dfrac{-2mg+\sqrt{4m^2g^2+4mghk}}{2k}$ は不適）、その座標は $y=-\dfrac{mg+\sqrt{mg(mg+hk)}}{k}$ である。

［別解］ 単振動という面から眺めると「この解法」が使える。（意外に便利な公式です）

単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、 $v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ より、振幅の公式 $A=\sqrt{x^2+\dfrac{v^2}{\omega^2}}$ が導かれる。　**※ 覚えておくと役に立つ公式です。**

単振動の中心 $y=-\dfrac{2mg}{k}$ であり、位置 $x=\dfrac{mg}{k}$ での速度が $v=\dfrac{\sqrt{2gh}}{2}$ 、角振動数が $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ より、振幅 $A=\sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2+\left(\dfrac{gh}{2}\right)\left(\dfrac{2m}{k}\right)}=\sqrt{\dfrac{m^2g^2+mghk}{k^2}}$ だから、最下点の座標は $y=-\dfrac{mg}{k}-\sqrt{\dfrac{m^2g^2+mghk}{k^2}}=-\dfrac{mg+\sqrt{m^2g^2+mghk}}{k}=-\dfrac{mg+\sqrt{mg(mg+hk)}}{k}$ 。

問６ **物体の運動は全て、「運動方程式」に帰着する。古典力学では ニュートンの「運動の法則」が基盤！**

一体となって運動している物体の位置の y 座標が y のとき、物体Ｂが物体Ａから受ける抗力を N とすると、物体Ｂには抗力（上向き）と重力（下向き）がかかる。よてt、このときの物体Ｂの運動方程式は $ma=N-mg$ である。

単振動の公式 $a=-\omega^2x$ より、その位置での加速度の大きさは $a=-\left(\sqrt{\dfrac{k}{2m}}\right)^2\left(y+\dfrac{mg}{k}\right)$ になるから $ma=N-mg$ に代入して $-\dfrac{k}{2}\left(y+\dfrac{mg}{k}\right)=N-mg$ が成立する。よって、物体Ｂが物体Ａから受ける抗力は $N=\dfrac{mg-ky}{2}$ である。

問７ **物体Ｂが物体Ａから離れるとき、物体Ｂが受ける抗力はゼロになる（よくあるパターン）。**

問６で求めた結果に代入して、 $mg-ky=0$ のとき、物体Ｂが物体Ａから離れる。よってそのときの物体の位置の y 座標は $y=\dfrac{mg}{k}$ である。