入試問題研究　第157回　2005年　東京工業大学　③ コンプトン効果

以下の文章の①から⑦の $\boxed{}$ にあてはまる適当な式または数値を記せ。また、問いに答えよ。ただし、プランク定数を $h=6.63\times10^{-34}$ [Js]、高速を $c=3.00\times10^{8}$ [m/s]、電気素量を $e=1.6\times10^{-19}$ [C] を用いよ。数値は有効数字3桁で示せ。

[A]　X線は光より波長の短い電磁波であり、波動性と粒子性の二重性をもつ。粒子と考えたとき、波長 λ のX線の粒子（光子）のエネルギーと運動量はそれぞれ $\boxed{①}$ および $\boxed{②}$ と表される。たとえば、波長 1.00×10^{-10} m の光子1個がもつエネルギーは $\boxed{③}$ eV である。

X線の粒子性はコンプトン効果に現れる。コンプトン効果ではX線を光子と考え、静止している自由電子と光子との衝突のモデルからX線の波長変化が説明される。図1のように衝突前の光子の波長を λ 、衝突後の波長を λ' とする。衝突後、光子は入射方向に対し角度 ϕ の方向に散乱され、質量 m の電子は角度 α の方向に速さ v ではね飛ばされる。

$$\frac{\boxed{④}}{\lambda}=\frac{\boxed{④}}{\lambda'}+\frac{1}{2}mv^2$$

この衝突の前後におけるエネルギー保存則を式で表すと

と書ける。また、衝突の前後における運動量保存の法則を、入射方向とそれに垂直な方向の成

$$\text{入射方向成分：}\frac{\boxed{⑤}}{\lambda}=\frac{\boxed{⑥}}{\lambda'}+mv\cos\alpha$$

$$\text{垂直方向成分：}0=-\frac{\boxed{⑦}}{\lambda'}+mv\sin\alpha$$

分に分けて書くと、

となる。これらの式から衝突によるX線の波長変化 $\Delta\lambda$ は、 $\Delta\lambda\ll\lambda,\lambda'$ と近似して

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda\approx\frac{h}{mc}(1-\cos\phi)=\lambda_c(1-\cos\phi)$$

と表される。ここで、 λ_c は電子のコンプトン波長で $\lambda_c=2.43\times10^{-12}$ [m] である。

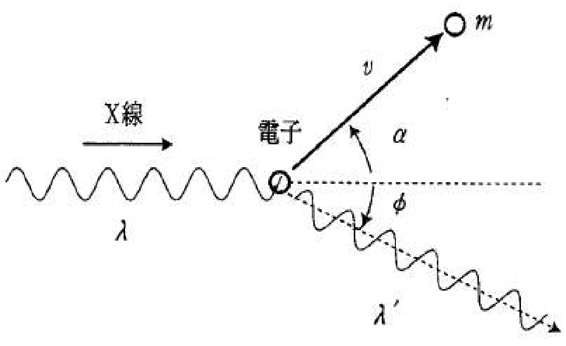

図1

[B] コンプトン効果は、図２に示すように単色Ｘ線を石墨に入射させ、Ｘ線分光器を用いて散乱Ｘ線のスペクトルを測定することで確認される。Ｘ線分光器ではＸ線をスリットを通して結晶表面に入射させ、反射したＸ線の強度を検出器で測定する。このとき結晶をＸ線の入射方向に対して回転角 θ だけ回転すると、結晶の回転に連動して散乱角 2θ の方向に検出器が移動するように設定されている。この設定により回転角を変えていくことで、さまざまな波長のＸ線に対して結晶表面に平行な格子面によるブラッグ反射が起こる。その反射強度を測定することで、入射Ｘ線のスペクトルを得ることが出来る。この測定により、石墨からの散乱Ｘ線の中に入射Ｘ線と同じ波長のＸ線の他に、コンプトン効果によりわずかに波長の異なるＸ線が含まれているのが観測される。

(a) 波長 λ の単色Ｘ線をＸ線分光器に入射させ、結晶を 0 rad から徐々に回転してゆくと、ある角度 θ のところで最初の散乱強度のピークが現れた。表面に平行な格子面の面間隔を d として、λ 、θ 、d の間の関係を式で表せ。

(b) 入射Ｘ線の中に λ よりわずかに長い波長 $\lambda+\Delta\lambda$ のＸ線が含まれている場合、この波長のＸ線が検出器で検出されるときの結晶の回転角を $\theta+\Delta\theta$ とする。$\Delta\theta$ が θ や１に比べ十分小さいとして、θ 、d 、$\Delta\lambda$ を用いて $\Delta\theta$ を表す近似式を求めよ。ただし、x が小さいとき $\sin x \approx x$ 、$\cos x \approx 1$ と近似してよい。

(c) 波長 λ の単色Ｘ線を石墨に入射し、散乱角 $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ rad の方向に散乱されたＸ線のスペクトルをＸ線分光器で測定した。散乱Ｘ線の中で波長変化の無いＸ線が結晶の回転角 θ のところで検出されたとすると、コンプトン効果により波長の変化したＸ線は θ からどれだけの角度離れた回転角のところで検出されるか。θ 、λ 、λ_c を用いて表せ。

(d) 結晶はＸ線に対し回折格子の役割をしている。コンプトン効果が光の領域で回折格子を用いた測定では見つからず、Ｘ線領域で発見された理由を、(c) の答えを参考にして 100 字程度で説明せよ。

※ [A] は教科書そのままの問題で誰でも解ける（差が付かない）。勝負は[B] の部分で決まる。

入試問題研究 第157回 2005年 東京工業大学 ③ コンプトン効果 解答・解説

[A] 波長 λ のX線光子のエネルギーは $E=h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}$ ・・・①、運動量は $E=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$ ・・・②

である。波長 1.00×10^{-10} mを公式①に代入して $E=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3.00\times10^{8}}{1.00\times10^{-10}}$ [J] である。

エネルギーの単位を変換して $E=1.24\times10^{4}$ [eV] ・・・③ である。

Ｘ線の粒子性はコンプトン効果に現れる。コンプトン効果ではＸ線を光子と考え、静止している自由電子と光子との衝突のモデルからＸ線の波長変化が説明される。図1のように衝突前の光子の波長を λ 、衝突後の波長を λ' とする。衝突後、光子は入射方向に対し角度 ϕ の方向に散乱され、質量 m の電子は角度 α の方向に速さ v ではね飛ばされるとする。この衝突の前後におけるエネルギー保存則を式で表すと $\dfrac{hc}{\lambda}=\dfrac{hc}{\lambda'}+\dfrac{1}{2}mv^2$ ・・・(1)が成立する。また、衝突の前後における運動量保存の法則を、入射方向とそれに垂直な方向の成分に分けて書くと、入射方向が $\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi+mv\cos\alpha$ ・・・(2) 、入射方向に垂直な方向が $0=-\dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi+mv\sin\alpha$ ・・・(3) より $\left(\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi\right)^2=m^2v^2$ が成立する。

整理して $h^2\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}-2\cos\phi\right)=m^2v^2\lambda\lambda'$ 。(1) より $2mhc(\lambda'-\lambda)=m^2v^2\lambda\lambda'$ だから、

$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\dfrac{h}{2mc}\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}-2\cos\phi\right)$ である。 $\Delta\lambda\ll\lambda,\lambda'$ より近似式 $\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}\approx2$ より、

散乱Ｘ線の波長変化は $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda\approx\dfrac{h}{mc}(1-\cos\phi)=\lambda_c(1-\cos\phi)$ ・・・[A] である。ここで、

λ_c は電子のコンプトン波長で $\lambda_c=2.43\times10^{-12}$ [m] である。

[B] 。

(a) ブラッグ反射の公式 $2d\sin\theta=m\lambda$ より、最初の強い反射だから $2d\sin\theta=\lambda$ である。

(b) $2d\sin(\theta+\Delta\theta)=\lambda+\Delta\lambda$ だから分解して $2d\sin\theta\cos\Delta\theta+2d\cos\theta\sin\Delta\theta=\lambda+\Delta\lambda$ が成立する。 $\Delta\theta$ が θ や1に比べ十分小さいので近似して $2d\sin\theta+2d\Delta\theta\cos\theta=\lambda+\Delta\lambda$ が成立する。(a) を代入して $\Delta\theta=\dfrac{\Delta\lambda}{2d\cos\theta}$ である。

(c) 散乱角が $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ rad より $\Delta\lambda=\dfrac{h}{mc}=\lambda_c$ である。(b) に代入して $\Delta\theta=\dfrac{\lambda_c}{2d\cos\theta}$ になる。

(a) より、 $2d=\dfrac{\lambda}{\sin\theta}$ を代入して、 $\Delta\theta=\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\theta$ ずれた角度位置で検出される。

(d) (c) より $\Delta\theta=\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\theta$ （ただし、 $\lambda_c=2.43\times10^{-12}$ ）である。 $\lambda\approx1\times10^{-6}$ [m] 程度の可視光線の場合、コンプトン効果による変化が回折格子を用いた測定では測定限界未満の角度差しか発生しない。一方、波長が非常に短いＸ線を使うと、その角度差が大きくなり角度差が測定可能となるから。