

入試問題研究 第160回 2005年 東京大学 ② 電磁気

図2-1のように、ボタン型磁石と薄いアルミニウム円板を貼り合わせたものを、磁石の磁力を使って鉄釘を介して乾電池の鉄製負電極につるす。乾電池の正極からリード線を延ばし、抵抗を介してリード線他端Pをアルミニウム円盤の円周上の点に触れさせると、アルミニウム円板とボタン型磁石は回転を始めた。その後、リード線とアルミニウム円板がすべりながら接触するようにリード線を保持すると、円板と磁石は回転し続けた。ボタン型磁石は、図2-1のように上面がN極、下面がS極で、電気を通さない。アルミニウム円板の半径を a [m]、乾電池の起電力を V [V]、抵抗の抵抗値を R [Ω]、アルミニウム円板を貫く磁束密度 B [T] は円板面内で一様として、以下の問いに答えよ。ただし、リード線とアルミニウム円板の間の摩擦、鉄釘と電池の摩擦は無視してよい。また、アルミニウム円板と鉄釘の間の摩擦は十分に大きく、これらは一体となって回転するものとする。

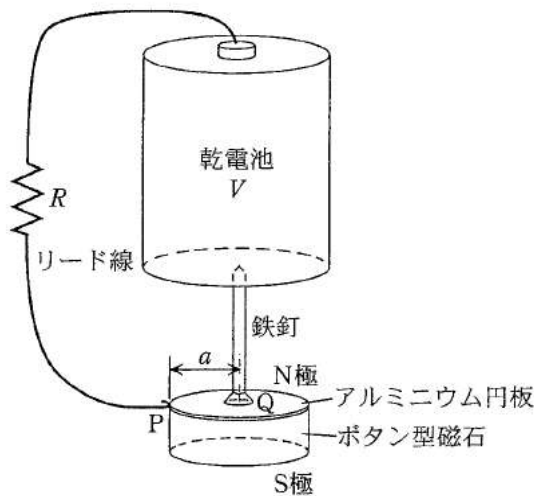


図2-1

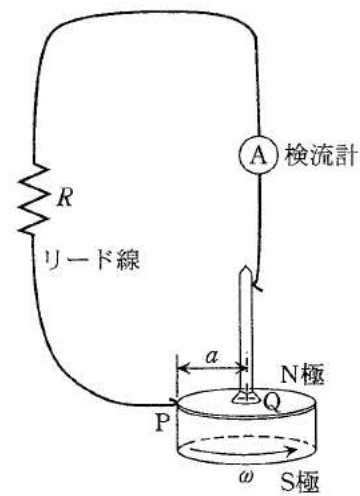


図2-2

- I アルミニウム円板とボタン型磁石が回転する方向を、理由を付して答えよ。略図を使っても良い。ただし、アルミニウム円板を流れる電流は、鉄釘との接合点Qと点Pの間を直線的に流れていると考えてよい。
- II 図2-2のように、乾電池の代わりに検流計を置く。アルミニウム円板とボタン型磁石を図2-2の矢印方向に力を加えて回転させると、検流計に電流が流れた。電流の流れる方向を理由を付して答えよ。
- III IIで生じていた起電力 E [V] の大きさは、ボタン型磁石の回転の角速度が ω [rad/s] のとき、 $E = b\omega B$ と表せることを示し、係数 b を求めよ。ただし、釘は十分細いとしてよい。
- IV 図2-1において、十分時間が経つとアルミニウム円板とボタン型磁石の角速度はある一定値 ω_1 [rad/s] になる。 ω_1 を V 、 B 、 b を用いて表せ。

入試問題研究 第160回 2005年 東京大学 ② 電磁気 解答・解説

フレミングの左手の法則、ローレンツ力などを思い付けばよい。特に難しい問題ではないが、論述形式の問題なので、苦手な人もいるかもしれません。最近の生徒は表現力が弱くなっているとの話も...

- I アルミニウム円板を流れる電流は、鉄釘との接合点 Q と点 P の間を直線的に流れていると考えてよい。磁界から電流が受ける力の向きは「**フレミングの左手の法則**」を使えば求まる。よって、円板を上から見て反時計周りの向きに回転する。
- II 図 2-2 のようにアルミニウム円板とボタン型磁石を矢印方向(上から見て反時計回り)に回転させるのだから、円板内の電子が受ける力「**ローレンツ力**」を考えればよい。円板内の自由電子は中心(点 P)に向かう力を受けるので、点 P が負、点 Q が正である。よって、電流の流れる方向は点 P から検流計を通して点 Q へと向かう向きである。
- III 「**磁界中を運動する導線に生じる起電力は、単位時間に磁束を切る量に等しい**」から Δt での

回転角は $\omega \Delta t$ になり、磁束を横切った面積(扇形の面積)だから $S = \frac{1}{2} a^2 \omega \Delta t$ である。

横切った磁束は $\Delta \phi = BS = \frac{1}{2} a^2 \omega B \Delta t$ だから、起電力は $E = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} a^2 \omega B$ である。

よって、比例定数は $b = \frac{a^2}{2}$ になることが分かる。

【別解】 大学によっては、「微積分を物理の入試問題に結びつける方向」にあるので、微積分を使ってこの問題の答えを求めてみよう。

半径 r の位置にある自由電子が円板の回転で生じる速度は $v = r\omega$ である。よって、その位置で電子が受けるローレンツ力は $f = evB$ より $f = er\omega B$ である。

ここで、電子を点 P から点 Q に移動させるときの仕事を求めることで PQ の電位差が求まる。半径 r の位置から $r + \Delta r$ に運ぶときの仕事は $\Delta W = f \Delta r$ であるから、 $dW = f dr$

だから、両辺積分して $W = \int_0^a er\omega B dr = \frac{e\omega B a^2}{2}$ が点 P から Q に電子を運ぶときの仕事

である。この仕事は PQ 間の電位差に逆らってした仕事に等しいことより、II で生じていた起電力 E [V] の大きさは $eE = \frac{e\omega B a^2}{2}$ を満たす。よって、起電力は $E = \frac{\omega B a^2}{2}$ である。

- IV 「**電池による電流の回転方向(反時計回り)に回転させたときに生じる起電力が、電池の起電力と逆向きになっている**」ことがポイントである。

このことから、図 2-1 において、十分時間が経つとアルミニウム円板とボタン型磁石の回転の角速度が ω_1 [rad/s] になれば、回転速度が一定になる(それ以上の速度にはならない)理由は、回転により生じる(逆)起電力が電池の起電力と等しくなり電流が流れなくなる。その結果、電流が流れなくなるので、磁界からの力が生じなくなり、円板の回転を加速することができなくなるからだ。

よって、 $V = b\omega_1 B$ が成立する。これより、円板の回転速度が一定になったときの角速度は

$$\omega_1 = \frac{V}{bB} \text{ である。}$$