入試問題研究 第161回 2005年 京都大学（後）② 電気

次の文を読んで、[　　] には適した式を、[　　] には適切な数値をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図１に示すように、回路部品が取り付けられたいくつかのブロックが準備されている。ブロックを接触させると、上の端子同士と下の端子同士がそれぞれ電気的に接続されるようになっている。図１では、左オ２つのブロックが接触しており、起電力 V_0 、内部抵抗 R_0 の電池と、電気

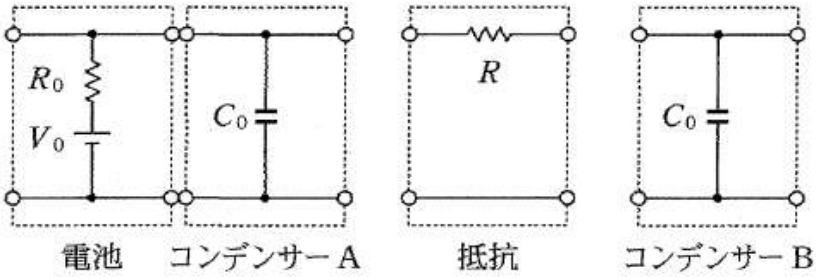

図１

容量 C_0 のコンデンサーＡが接続されている。十分に時間が経ってから、２つのブロックを切り離すと、コンデンサーＡには電荷 $q_0 = C_0 V_0$ が蓄えられている。この電気的エネルギーは、$U_0 = q_0^2/(2C_0)$ である。コンデンサーＡに蓄えられた電荷をできるだけ多く、同じ電気容量 C_0 を持つ別のコンデンサーに移動することを考えよう。

(1) 図１において、右の３つのブロックを接続して、電池から切り離されたコンデンサーＡに対して、初期電荷０、電気容量 C_0 のコンデンサーＢを抵抗 R を通して接続する。十分に時間をおいて、電圧が等しくなってから、３つのブロックを切り離す（以降、コンデンサーを抵抗を通して接続し、切り離す作業は同じように行うものとする）。そのとき、コンデンサーＢの電荷は [イ] × q_0 、電圧は [ロ] × V_0 である。また抵抗で熱として消費されるエネルギーは $U_0/2$ であり、 R によらない。

(2) より多くの電荷を移動する工夫をしてみよう。コンデンサーＢの代わりに、電気容量 $C_0/2$ のコンデンサーＤ、Ｅを準備する。Ｄ、Ｅの初期電荷は０であるとする。まず、コンデンサーＤをコンデンサーＡに抵抗を通して接続した後に切り離す。つぎに、コンデンサーＥについても同様にＡに抵抗を通して接続し、切り離す。さらに、ＤとＥを抵抗を通して接続し、じゅうぶんに時間がたって電圧が等しくなってから、ＤとＥを並列に直接接続する。この電気容量 C_0 のコンデンサーの電荷は [ハ] × q_0 である。この過程で失われた全エネルギーは [ニ] × U_0 である。

(3) さらに多くの電荷を移動するために、電気容量が C_0/N 、初期電荷 0 のコンデンサーを N 個用意する。(2)と同様に、1 個ずつ順番に抵抗を通してコンデンサー A と接続した後に切り離す。次に、 N 個のコンデンサーの電圧が全て等しくなるように、互いに抵抗を通して接続し、その後に並列接続して容量 C_0 のコンデンサーにする。この電荷は N を大きくすると、次第に、 ホ × q_0 に近づく。ここで $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ が N を大きくするとほぼ 2.7 になることを利用した。

(4) 上記(2)や(3)のような工夫をしても、100%に近い電荷の移動は不可能であることが明らかになった。しかし、コンデンサー A、B の電気容量を途中で変化させてもよければ、さらに多くの電荷を移せる。以下でこのことを示そう。一般に、電荷 q に充電されたコンデンサーの容量を、C_1 から C_2 に変化させるのに必要な仕事は へ である。ここで、電気容量 C_0 のコンデンサー A、B に対して以下のような操作を行う。初期電荷は、それぞれ q_0 、0 であるとする。

(a) A の容量を αC_0 に変化させる。ただし、 $\alpha>1$ とする。

(b) B の容量を βC_0 に変化させる。ただし、 $\beta>1$ とする。

(c) A と B を抵抗を通して接続し、切り離す。

(d) B の容量を C_0 に変化させる。

この一連の操作によって、コンデンサー B の電荷は ト × q_0 となる。(a)において必要な仕事は チ × U_0 、(c)において抵抗で失われたエネルギーは リ × U_0 、(d) において必要な仕事は ヌ × U_0 である。 β が α より十分大きく、さらに α が 1 より十分に大きい場合には、これら 4 つの量は、それぞれ q_0 、 $-U_0$ 、0、 U_0 にほぼ等しい。したがって、(a)において外部に対して行った仕事を、(d)において再利用することができれば、エネルギーを失うことなく、電荷をほぼ 100%移動させることが、原理的には可能である。

入試問題研究 第161回 2005年 京都大学（後）② 電気　解答･解説

(1) 最初、Aには電荷 $q_0=C_0V_0$ が蓄えられている。電池から切り離されたコンデンサーAに対して、初期電荷0、電気容量 C_0 のコンデンサーBを抵抗 R を通して接続する。十分に時間をおくと、電流が流れなくなる（抵抗の電圧がゼロになる）。同じ容量のコンデンサーだから、電気量保存の法則より、半分ずつの電気量になる。よって、コンデンサーBの電荷は $\frac{1}{2}q_0$ だから、$\frac{1}{2}$ ･･･ $\boxed{イ}$、電圧も $\frac{1}{2}V_0$ だから $\frac{1}{2}$ ･･･ $\boxed{ロ}$ である。$U_0=\frac{q_0^2}{2C_0}$ である。

コンデンサーのエネルギー減少分は $-\Delta U_0=q_0^2/(2C_0)-\left((q_0/2)^2/(2C_0)\right)\times 2=q_0^2/(4C_0)$ だから、抵抗による発熱量は $q_0^2/(4C_0)=U_0/2$ になり、抵抗値 R によらない。

(2) 電気容量 $C_0/2$ のコンデンサーD、Eを準備する。D、Eの初期電荷は0であるとする。まず、コンデンサーDをコンデンサーAに抵抗を通して接続したとき、A、Dの電圧が V とする。電気量保存の法則より、$C_0V_0=C_0V+\frac{1}{2}C_0V$ だから、$V=\frac{2}{3}V_0$ になり $q_D=\frac{1}{3}q_0$ 電荷がDに移る。つぎに、コンデンサーEについても、A、Eの電圧を V' とする。電気量保存の法則より、$C_0V=C_0V'+\frac{1}{2}C_0V'$ だから、$V'=\frac{2}{3}V=\frac{4}{9}V_0$ になり $q_E=\frac{2}{9}q_0$ 電荷がEに移る。よって、並列接続した合成容量が C_0 のコンデンサーの電荷は $q_D+q_E=\frac{5}{9}q_0$ になり、$\frac{5}{9}$ ･･･ $\boxed{ハ}$、そのときの電圧は $\frac{5}{9}V_0$ である。

よって、コンデンサーのエネルギーは、Aが $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}q_0\cdot\frac{4}{9}V_0=\frac{8}{81}q_0V_0=\frac{16}{81}U_0$、DとEの並列接続のコンデンサーが $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}q_0\cdot\frac{5}{9}V_0=\frac{25}{162}q_0V_0=\frac{25}{81}U_0$ である。よって、その間で失われたエネルギーは $-\Delta U_0=U_0-\frac{16}{81}U_0-\frac{25}{81}U_0=\frac{40}{81}U_0$ ･･･ $\boxed{ニ}$ である。

(3) さらに多くの電荷を移動するために、電気容量が C_0/N、初期電荷0のコンデンサーを N 個を使う場合を考える。接続するとAが持っている電気量を容量比で与えるので、1個目では、最初のコンデンサーに $\frac{1}{N+1}q_0$ の電荷を与え、コンデンサーAの電荷は $\frac{N}{N+1}q_0$ となる。次のコンデンサーにも同様にするので、次のコンデンサーに $\frac{1}{N+1}\cdot\frac{N}{N+1}q_0$ を与えて、Aが $\left(\frac{N}{N+1}\right)^2q_0$ になる。以下同様にして、N 個目では、$\left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}\cdot\frac{1}{N+1}q_0$ 与えて、Aが $\left(\frac{N}{N+1}\right)^Nq_0$ になる。したがって、コンデンサーAが与えることが出来た電荷は

$$q=\frac{1}{N+1}q_0+\frac{1}{N+1}q_0\cdot\left(\frac{N}{N+1}\right)+\cdots+\frac{1}{N+1}q_0\cdot\left(\frac{N}{N+1}\right)^{k-1}+\cdots+\frac{1}{N+1}q_0\cdot\left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}$$ より、

等比数列の和の公式を使って $q=\left\{1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^N\right\}q_0$ だから $q=\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}\right\}q_0$ である。

ここで $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ が N を大きくするとほぼ 2.7（**正確には自然数 e = 2.71828…**）になる。よって、

この電荷は N を大きくすると、 $q=\left(1-\frac{1}{2.7}\right)q_0$ になる。よって、0.63・・・ ホ である。

(4) 上記(2)や(3)のような工夫では $q=\left(1-\frac{1}{e}\right)q_0$ （ただし、e は自然数）までしか電荷の移動は不可能であることが明らかになった。しかし、コンデンサー A、B の電気容量を途中で変化させてもよければ、さらに多くの電荷を移せる。

電荷 q に充電されたコンデンサーの容量を、 C_1 から C_2 に変化させるときの仕事はコンデンサーのエネルギー差に等しいから、 $W=\frac{q^2}{2C_2}-\frac{q^2}{2C_1}$ ・・・ ヘ である。ここで、電気容量 C_0 のコンデンサー A、B に対して以下のような操作を行う。初期電荷は、それぞれ q_0 、0 であるとする。

(a) A を αC_0 に変化させると $W_\alpha=\frac{q_0^2}{2\alpha C_0}-\frac{q_0^2}{2C_0}=\frac{q_0^2}{2C_0}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}$ の仕事が必要。

(b) B を βC_0 に変化させると $W_\beta=\frac{q_0^2}{2\beta C_0}-\frac{q_0^2}{2C_0}=\frac{q_0^2}{2C_0}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}$ の仕事が必要。

(c) A と B を抵抗を通して接続し、切り離す。B に移る電荷は $q=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q_0$ になる。

(d) B の容量を C_0 に変化させる。 $W=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}q_0\right)^2\cdot\frac{\beta-1}{2\beta C_0}=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\cdot\frac{\beta-1}{\beta}\cdot\left(\frac{q_0^2}{2C_0}\right)$

よって、(c) より、 $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ ・・・ ト となる。(a) より、 $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ ・・・ チ 、(c) での抵抗で失うエネルギーは $Q=\left(\frac{q_0^2}{2\alpha C_0}\right)-\frac{\left(\frac{\alpha q_0}{\alpha+\beta}\right)^2}{2\alpha C_0}-\frac{\left(\frac{\beta q_0}{\alpha+\beta}\right)^2}{2\beta C_0}=\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\cdot\frac{q_0^2}{2C_0}$ だから $\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}$ ・・・ リ である。また、(d) において必要な仕事は $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\cdot\frac{\beta-1}{\beta}$ ・・・ ヌ である。

β が α より十分大きく、さらに α が 1 より十分に大きい場合を考える。

B に移る電荷は $q=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot q_0 \to q_0$ だから 100%移動できる。

B に電荷を移す過程で抵抗で消費されるエネルギーは $Q=\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}\cdot\frac{q_0^2}{2C_0} \to 0$

B の容量を β 倍にするとき必要な仕事は $W_\beta=\frac{\beta}{1-\beta}\cdot U_0 \to -U_0$ である。

B の容量を元に戻すときの仕事は $W=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\cdot\frac{\beta-1}{\beta}\cdot\left(\frac{q_0^2}{2C_0}\right) \to U_0$ になる。

よって、容量を β 倍にするときの外部に対して行った仕事を、容量を元に戻すときに外部から取り戻す（再利用）することができれば、エネルギーを失うことなく、電荷をほぼ 100%移動させることが、原理的には可能であることがわかる。