

入試問題研究 第162回 2005年 筑波大学 ② 電気

金属導線に電場を加えたときの自由電子の運動について考える。導線内では、自由電子は、電場による加速と金属イオンとの衝突による減速を繰り返しながら移動する。電子の質量を m 、電荷を $-e$ として、以下の問いに答えよ。解答は全て解答用紙の所定の欄に記入し、考え方や計算の要点も記入せよ。

問1 導線に沿って強さ E の電場を加えたとき、自由電子の加速度を E 、 e 、 m のうち必要なものを用いて表せ。

問2 加速された自由電子は、平均して一定時間 t_0 ごとに金属イオンと衝突を繰り返す。1回の衝突のたびに運動エネルギーを失って速度ゼロになると考える。導線に沿った方向の、(1) 衝突直前の自由電子の速度 v と、(2) t_0 秒間の平均速度 v_m を求めよ。答えは、 E 、 e 、 m 、 t_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問3 断面積 S 、単位体積あたりの自由電子数 n の導線を通る電流 I を E 、 e 、 S 、 n 、 v_m のうち必要なものを用いて表せ。

問4 断面積 S 、長さ l の導線の両端に電位差 V を与えたとき、(1) 電流 I は電位差 V に比例することを示せ。このとき、(2) 抵抗率(比抵抗)は $\rho = 2m/(ne^2t_0)$ と書けることを示せ。

問5 銅は、原子量 64、密度 $9.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、抵抗率(常温) $1.7 \times 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$ で、1原子当たり、1個の自由電子を持つ。

(1) 1m^3 あたりの自由電子数(常温) n を有効数字2桁で求めよ。

(2) 銅線中のそれぞれの自由電子は、1秒間に何回金属イオンと衝突することになるか

有効数字2桁で答えよ。ただし、 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、アボガドロ定数は 6.0×10^{23} である。

入試問題研究 第162回 2005年 筑波大学 ② 電気

解答・解説

問1 導線に沿って強さ E の電場を加えたとき、自由電子が受ける力は $f=eE$ である。この力で運動し、運動方程式は $ma=eE$ である。よって、そのときの加速度は $a=\frac{eE}{m}$ である。

問2 等加速度運動の公式 $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 、 $v=v_0+at$ を適用すればよい。 t_0 [s] 間に自由電子が進んだ距離は $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}\cdot t_0^2$ 、最高速度は $v=\frac{eE}{m}\cdot t_0$ である。また、 t_0 秒間の平均速度は $v_m=\frac{x}{t_0}=\frac{eEt_0}{2m}$ である。

問3 断面積 S 、平均速度 v_m 、単位体積あたりの自由電子数 n のとき、導線を通る電流は $I=en v_m S$ である。

問4 断面積 S 、長さ l の導線の両端に電位差 V を与えたとき、電場の強さは $E=\frac{V}{l}$ になる。また、問2の $v_m=\frac{x}{t_0}=\frac{eEt_0}{2m}$ 、問4の $E=\frac{V}{l}$ 、問3の $I=en v_m S$ より、 E 、 v_m を消去してやると $I=\frac{e^2 n S t_0}{2 m l} V$ が得られる、よって、電流は電位差に比例している。抵抗率(比抵抗)は定義式 $R=\rho\frac{l}{S}$ 、オームの法則 $V=IR$ より、 $R=\frac{2 m l}{e^2 n S t_0}=\rho\frac{l}{S}$ だから、 $\rho=\frac{2 m}{n e^2 t_0}$ と書ける。

問5 銅は、原子量 64、密度 9.0×10^3 kg/m³、抵抗率(常温) 1.7×10^{-8} Ωm で、1原子当たり、1個の自由電子を持つとするので、具体的に数値で考えてみる。

(1) 銅 1m³ を考えてみよう。密度が 9.0×10^3 kg/m³ だから、質量 9.0×10^3 kg になる。

1モルの質量は 64×10^{-3} kg なので、 $\frac{9.0\times 10^3}{64\times 10^{-3}}=1.40\times 10^5$ モルに相当する。1モルの銅

原子数はアボガドロ数 6.0×10^{23} 個だから、銅 1m³ の中の銅原子数は 8.437×10^{28} 個になる。原子 1個当たり自由電子が 1個であることから、銅 1m³ 中に存在する自由電子数(常温)は 8.4×10^{28} 個になる。

(2) 問4の $\rho=\frac{2 m}{n e^2 t_0}$ に数値を代入して、 $1.7\times 10^{-8}=\frac{2\times 9.1\times 10^{-31}}{8.437\times 10^{28}(1.6\times 10^{-19})^2 t_0}$ が成立

する。よって、 $t_0=\frac{2\times 9.1\times 10^{-31}}{8.437\times 10^{28}(1.6\times 10^{-19})^2 1.7\times 10^{-8}}=0.496\times 10^{-13}$ である。よって、銅線中

を動く自由電子の平均衝突時間は $t_0=0.496\times 10^{-13}$ 秒であることが分かる。

よって、自由電子は金属イオンと 1秒間に 2.0×10^{13} 回衝突していることがわかる。