

入試問題研究 第163回 2005年 金沢大学 ③ ホイートストーンブリッジ

図3aのように、5つの抵抗 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R と電池およびスイッチ S からなる回路を考える。抵抗 R_1 の抵抗値は R_1 [Ω]、抵抗 R_2 の抵抗値は R_2 [Ω]、抵抗 R_3 の抵抗値は R_3 [Ω]、抵抗 R_4 の抵抗値は R_4 [Ω] および抵抗 R の抵抗値は R [Ω] とする。電池の起電力は E [V] で、内部抵抗は無視できる。初めはスイッチ S が開いている。

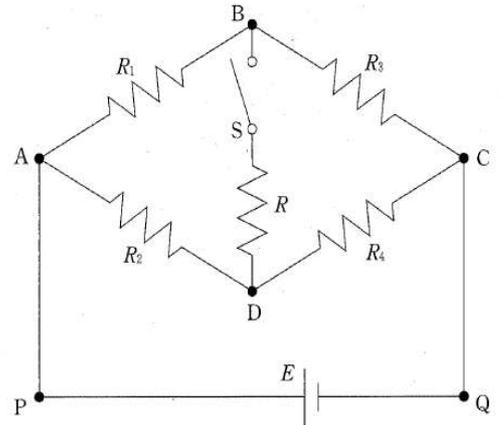


図3 a

(1) 抵抗 R_3 、抵抗 R_4 および電池を流れる電流は、それぞれいくらか。

(2) D に対する B の電位はいくらか。

次に図3bのようにスイッチ S を閉じる。このとき、A から B に向かって電流 I_1 [A]、A から D に向かって電流 I_2 [A]、D から B に向かって電流 I [A] がそれぞれ流れている。

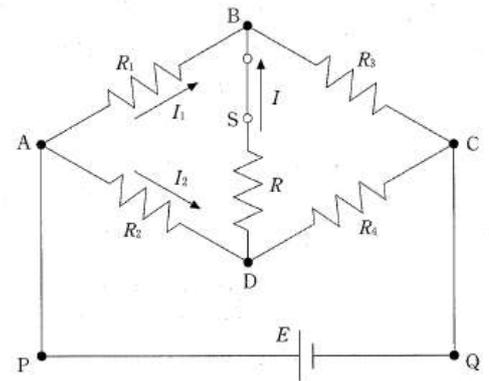


図3 b

(3) 抵抗 R_3 を流れる電流を、 I と I_1 を用いて表せ。また、抵抗 R_4 を流れる電流を I と I_2 を用いて表せ。

(4) 回路 ABDA、回路 BCDB および回路 PABCQP について、それぞれ起電力と電圧降下の関係(キルヒホッフの法則)を式で示せ。

(5) D から B に流れる電流 I を抵抗 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R および起電力 E を用いて表せ。

(6) 抵抗 R に電流が流れない時の抵抗値 R_1 を、抵抗値 R_2 、 R_3 および R_4 を用いて表せ。

入試問題研究 第163回 2005年 金沢大学 ③ ホイトストーンブリッジ 解答・解説

(1) ABCを流れる(抵抗 R_3 を流れる)電流を i_1 、ADCを流れる電流(抵抗 R_4 を流れる)電流を i_2 とする。キルヒホッフの法則より、 $E=R_1 i_1+R_3 i_1$ 、 $E=R_2 i_2+R_4 i_2$ が成立するから、抵抗 R_3 を流れる電流は $i_1=\frac{E}{R_1+R_3}$ 、抵抗 R_4 を流れる電流は $i_2=\frac{E}{R_2+R_4}$

である。また、電池を流れる電流は $i=i_1+i_2$ より $i=\frac{E}{R_1+R_3}+\frac{E}{R_2+R_4}$ である。

(2) C点を基準と。Bの電位は $V_B=i_1 R_3=\frac{E R_3}{R_1+R_3}$ 、Dの電位は $V_D=i_2 R_4=\frac{E R_4}{R_2+R_4}$ であ

るので、D点から見たB点の電位は $V=V_B-V_D=\frac{E R_3}{R_1+R_3}-\frac{E R_4}{R_2+R_4}=\frac{E(R_2 R_3-R_1 R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$ である。

(3) ここからが問題の本番ですね。次に図3bのようにスイッチSを閉じる。このとき、AからBに向かって電流 I_1 [A]、AからDに向かって電流 I_2 [A]、DからBに向かって電流 I [A] がそれぞれ流れているとする。

キルヒホッフの第一法則(回路上の任意の交点で、電流の和ゼロ)より、抵抗 R_3 を流れる電流は I_1+I である。また、抵抗 R_4 を流れる電流は I_2-I である。

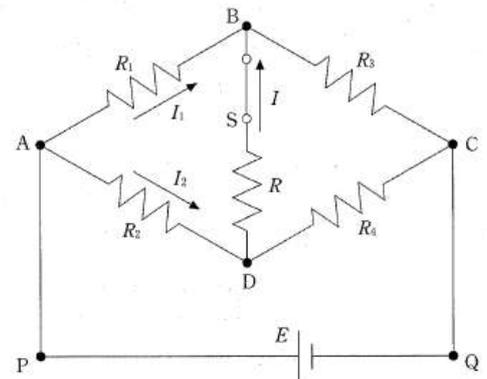


図3b

(4) 起電力と電圧降下の関係(キルヒホッフの第一法則)をそれぞれの閉回路に適用(時計周り向き)すればよい。

回路ABDA(時計回り)で $0=I_1 R_1-I R-I_2 R_2 \dots \textcircled{1}$ 、

回路BCDB(時計回り)で $0=I R+(I_1+I) R_3-(I_2-I) R_4 \dots \textcircled{2}$ 、

回路PABCQP(時計回り)で $E=I_1 R_1+(I_1+I) R_3 \dots \textcircled{3}$ が成立する。

(5) I_1 、 I_2 を(4)の3式を使って消去すればよい。③より $I_1=\frac{E-I R_3}{R_1+R_3} \dots \textcircled{4}$ である。

①より $I_2=\frac{I_1 R_1-I R}{R_2}$ だから、②に代入して $0=I R+(I_1+I) R_3-\left(\frac{I_1 R_1-I R}{R_2}-I\right) R_4$ だ

から、 $0=I(R R_2+R_3 R_2+R_2 R_4+R R_4)+I_1(R_3 R_2-R_1 R_4)$ である。これに④を代入して整理すると、 $0=I(R R_2+R_3 R_2+R_2 R_4+R R_4)(R_1+R_3)+(E-I R_3)(R_3 R_2-R_1 R_4)$ であるので、
 $0=I(R R_2+R_3 R_2+R_2 R_4+R R_4)(R_1+R_3)-I R_3(R_3 R_2-R_1 R_4)+E(R_3 R_2-R_1 R_4)$ である。

DからBへの電流 I は $I=\frac{E(R_3 R_2-R_1 R_4)}{R_3(R_3 R_2-R_1 R_4)-(R R_2+R_3 R_2+R_2 R_4+R R_4)(R_1+R_3)}$ 。

(6) (5)より、抵抗 R に電流が流れない時($I=0$)の抵抗値 R_1 は、 $R_3 R_2-R_1 R_4=0$ であるので、 $R_1=\frac{R_2 R_3}{R_4}$ である。