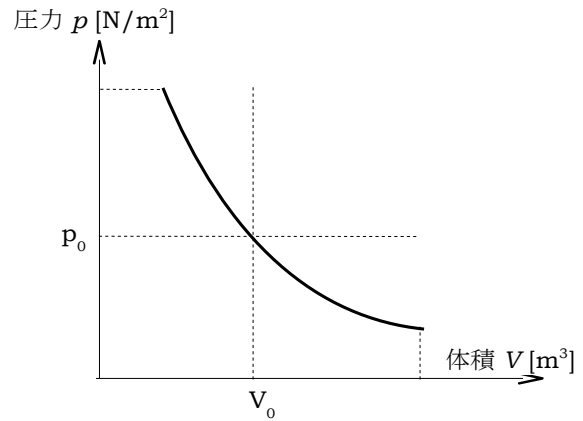


入試問題研究 第166回 2002年度 広島大学 ③ 気体の変化

次の文章を読み、問1～問3に答えよ。

1モルの理想気体の圧力 p 、体積 V 、絶対温度 T はボイルシャルルの法則と呼ばれる状態方程式 $pV=RT$ に従って変化することが知られている。ここで $R=8.3$ [J/mol・K] は気体定数である。例えば体積 $V=1$ [m³]、絶対温度 $T=300$ [K] の気体の圧力は $p=$ (A) [N/m²] になる。また、内部エネルギーは $U=C_V T$ であることも知られている。 C_V は定積熱容量で、単原子気体の場合は $C_V=$ (B) である。



気体の圧力と体積が変化するとそれに応じて温度も変化する。いま圧力が $p=p_0$ から $p=P_0+\Delta p$ 、体積が $V=V_0$ から $V=V_0+\Delta V$ に変化したとき、絶対温度が $T=T_0$ から $T=T_0+\Delta T$ に変化したとしよう。 Δp 、 ΔV は微小量であり、それらの積 $\Delta p \Delta V$ はさらに小さく無視できるとすると、 $R\Delta T=$ (C) $+p_0\Delta V$ の関係が得られる。

まず、 $\Delta T=0$ の等温変化の場合を考えよう。このとき圧力変化と体積変化の関係は $\Delta p=$ (D) ΔV となる。次に断熱変化の場合について考えよう。断熱変化では、内部エネルギー変化は外部から受け取る仕事に等しいので $\Delta U=C_V\Delta T=-p_0\Delta V$ が成り立つ。したがって、体積変化

ΔV にともなう圧力変化 Δp は $\Delta p=-\gamma \frac{p_0}{V_0}\Delta V$ で与えられ、 γ は C_V 、 R を用いて $\gamma=$ (E) と表される。また、体積変化にともなう温度変化 ΔT を T_0 、 V_0 、 γ および ΔV を用いて表すと、 $\Delta T=$ (F) となる。このことから、断熱変化の場合、体積が増えると気体の温度は (G) ことが分かる。

問1 文中の空欄 (A)～(G) に適切と思われる数値、式、または語句を記入して文を完成させよ。空欄 (C)、(E) については導き方も記述すること。

問2 右のグラフには、絶対温度 T_0 に保ったときの圧力と体積の関係を表す曲線が描かれている。縦軸は圧力、横軸は体積である。前の文章を参考にして、断熱変化の場合の圧力、体積の関係を表す曲線で、点 (V_0, p_0) を通るものを書き入れよ。

問3 断面積 S のシリンダーがあり、質量 M のピストンで仕切られている。ピストンやシリンダーは断熱材で出来ている。左右の部屋にはそれぞれ1モルの理想気体があり、各部屋の容積は V_0 、圧力は p_0 で、ピストンはつりあいの位置に静止している。

ピストンをつりあいの位置から右方向に微小距離 A だけ移動して時刻 $t=0$ に静かに離したところ、ピストンは単振動を始めた。ピストンに働く摩擦力は無視できるとして以下の問いに答えよ。

- (1) ピストンがつりあいの位置から右方向に微小距離 x の位置にあるときの左右の部屋の圧力をそれぞれ $p_0+\Delta p_L$ 、 $p_0+\Delta p_R$ とおく。 Δp_L 、 Δp_R を x 、 S 、 γ 、 p_0 、 V_0 を用いて表せ。
- (2) ピストンがつりあいの位置から右方向に微小距離 x の位置にあるとき、ピストンに右方向に働く力 F を x 、 S 、 γ 、 p_0 、 V_0 を用いて表せ。
- (3) 単振動の角振動数 ω を求めよ。また、時刻 t でのピストンの位置 x を表す式を書け。次の文章を読み、問1～問3に答えよ。

入試問題研究 第166回 2002年度 広島大学 ③ 気体の変化 解答・解説

問1. 1モルの理想気体の圧力 p 、体積 V 、絶対温度 T とすると $pV=RT$ が成立する。

$R=8.3$ [J/mol・K] だから、体積 $V=1$ [m³]、絶対温度 $T=300$ [K] とすると、圧力は

$$p=\frac{RT}{V}=\frac{8.3\times 300}{1}=2490 \text{ になり } 2.5\times 10^3 \cdots \text{(A) [N/m}^2\text{]} \text{ である。内部エネルギーは}$$

$$U=C_V T \text{ (} C_V \text{ は定積熱容量(定積モル比熱のこと))であり、単原子気体の場合 } C_V=\frac{3}{2}R$$

$\cdots$ (B) だ。【参考】2原子分子の場合は $C_V=\frac{5}{2}R$ である。

圧力が $p=p_0$ から $p=P_0+\Delta p$ 、体積が $V=V_0$ から $V=V_0+\Delta V$ 、絶対温度が $T=T_0$ から $T=T_0+\Delta T$ に変化したとき、始めの状態方程式より $pV=RT \cdots$ ① と、後の状態方程式 $(p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V)=R(T_0+\Delta T) \cdots$ ② の2式が成立する。

②-①より、 $p_0\Delta V+V_0\Delta p+\Delta p\Delta V=R\Delta T$ が得られるが、 Δp 、 ΔV は微小量であり、それらの積 $\Delta p\Delta V$ はさらに小さく無視できるから $p_0\Delta V+V_0\Delta p=R\Delta T \cdots$ ③ が成立する。よって、 $V_0\Delta p \cdots$ (C) である。

【等温変化の場合】 温度変化無しより $\Delta T=0$ だから、③に代入して $p_0\Delta V+V_0\Delta p=0$ である。

よって、圧力変化と体積変化の関係は $\Delta p=-\frac{p_0}{V_0}\Delta V$ より、 $-\frac{p_0}{V_0} \cdots$ (D) となる。なお、この値

(D) は、気体の状態図(pV図)の傾きを表す値である。 ※ 後で値を使用する！

【断熱変化の場合】 断熱変化では、「内部エネルギー変化は外部から受け取る仕事に等しい」ので

$\Delta U=C_V\Delta T=-p_0\Delta V$ が成り立つので、③を使って ΔT を消去すると、

$C_V(p_0\Delta V+V_0\Delta p)=-R p_0\Delta V$ が得られる。よって、体積変化 ΔV にともなう圧力変化

Δp は $\Delta p=-\left(\frac{C_V+R}{C_V}\right)\frac{p_0}{V_0}\Delta V$ となる。よって、 $\gamma=\frac{C_V+R}{C_V} \cdots$ (E) と表される。よって、

$$\Delta p=-\gamma\frac{p_0}{V_0}\Delta V \cdots$$
④

なお、④の $-\gamma\frac{p_0}{V_0}$ は、断熱変化のときの気体の状態図(pV図)の傾

きを表すものである。 ※ 後でこの値を使用する！

④を③に代入して、 $p_0\Delta V-\gamma p_0\Delta V=R\Delta T$ だから、体積変化にともなう温度変化 ΔT は

$$\Delta T=(1-\gamma)\frac{p_0}{R}\Delta V \cdots$$
(F)

となる。(E)より $\gamma>1$ すなわち、 $1-\gamma<0$ だから、体積が増える(

$\Delta V>0$)と、 $\Delta T<0$ になり、気体の温度は「下がる」 $\cdots$ (G)

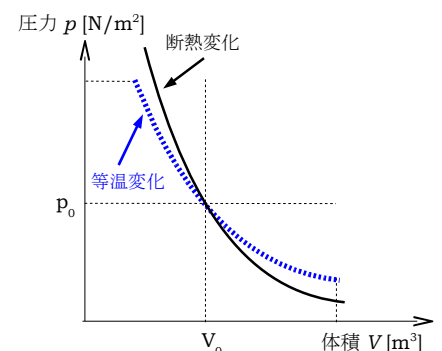
のである。

問2 問1より、状態図の傾きは、等温変化が $-\frac{p_0}{V_0}$ 、断熱変化が

$$-\gamma\frac{p_0}{V_0} \text{ になる。 } \gamma=\left(\frac{C_V+R}{C_V}\right)>1 \text{ より、グラフの傾きは「断熱}$$

変化の方が等温変化より大きい」から右図になる。

問3 断面積 S のシリンダーがあり、質量 M のピストンで仕切ら



れている。ピストンやシリンダーは断熱材で出来ている。左右の部屋にはそれぞれ1モルの理想気体があり、各部屋の容積は V_0 、圧力は p_0 で、ピストンはつりあいの位置に静止している。

ピストンをつりあいの位置から右方向に微小距離 A だけ移動して時刻 $t=0$ に静かに離したところ、ピストンは単振動を始めた。ピストンに働く摩擦力は無視できるとして以下の問いに答えよ。

- (1) 問1の④式 $\Delta p = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \Delta V$ より、ピストンがつりあいの位置から右方向に微小距離 x の位置

にあるから、 $\Delta V_L = +Sx$ 、 $\Delta V_R = -Sx$ である。よって、 $\Delta p_L = -\frac{\gamma p_0 S x}{V_0}$ 、

$\Delta p_R = +\frac{\gamma p_0 S x}{V_0}$ である。

- (2) ピストンを押す力(右向き正)は、 $f_L = +(p_0 + \Delta p_L)S$ 、 $f_R = -(p_0 + \Delta p_R)S$ だから、ピストンに右方向に働く力 $F = f_L + f_R = S \Delta p_L - S \Delta p_R = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x$ になる。

- (3) ピストンの運動方程式を作ると、 $M a = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x$ であるので、 $a = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{M V_0} x$ になり、単振

動の公式 $a = -\omega^2 x$ より、角振動数 ω は $\omega = \sqrt{\frac{2\gamma p_0 S^2}{M V_0}}$ である。

また、時刻 t でのピストンの位置は $x = A \cos \omega t$ だから、 $x = A \cos \sqrt{\frac{2\gamma p_0 S^2}{M V_0}} t$ だ。