

入試問題研究 第167回 2002年度 広島大学 ④ コイルとコンデンサー

図に示す起電力 E [V] の電池を含む直流回路について、以下の問いに答えよ。いずれの回路においても、スイッチの接点の抵抗、電池とコイルの内部抵抗、結線に用いた導線の抵抗は無視できるものとする。

問1 図1に示す、抵抗値 r [Ω]、 R [Ω] の二つの抵抗、自己インダクタンス L [H] のコイル、スイッチ S からなる回路について考える。以下の (ア) から (ウ) に、適切な数式を入れよ。

S を閉じてから、十分に長い時間が経過した後、抵抗 r を流れる電流は $\boxed{\text{ア}}$ [A]、抵抗 R を流れる電流は $\boxed{\text{イ}}$ [A] となる。この状態でスイッチ S を開く。 S を開いてから、十分に長い時間が経過する間に抵抗 R で発生するジュール熱は $\boxed{\text{ウ}}$ [J] である。

問2 図2に示す、抵抗値 r [Ω]、 R [Ω] の二つの抵抗、容量 C [F] のコンデンサー、自己インダクタンス L [H] のコイル、スイッチ S からなる回路について考える。はじめの状態において、スイッチ S は開いており、コンデンサーは電荷が蓄えられていないものとする。

(1) 以下の (エ) から (カ) に適切な数式を入れよ。

S を閉じてから十分に長い時間が経過した後、コンデンサーに蓄えられているエネルギーは $\boxed{\text{エ}}$ [J] であり、コイルに蓄えられているエネルギーは $\boxed{\text{オ}}$ [J] である。その後、 S を開いてから十分に長い時間が経過する間に、抵抗 R で発生するジュール熱は $\boxed{\text{カ}}$ [J] である。

(2) 抵抗 R を可変抵抗に取り替えた。はじめの状態に戻し S を閉じた。十分に長い時間が経過した後、抵抗 R で単位時間あたりに発生するジュール熱が最大となる抵抗 R [Ω] を求めよ。

問3 図3に示す、抵抗値 r [Ω]、 R [Ω] の二つの抵抗、二つのスイッチ S_1 、 S_2 、および二つのコンデンサー①と②からなる回路について考える。コンデンサー①の容量は C [F]、コンデンサー②の容量は $\frac{C}{2}$ [F] である。はじめの状態において、 S_1 、 S_2 は開いており、二つのコンデンサーには電荷が蓄えられていないものとする。以下の (キ) から (ス) に適切な数式を入れよ。(シ)、(ス) については導出の過程も示せ。

(1) S_2 を閉じてから S_1 を閉じた。その直後に抵抗 r を流れる電流は $\boxed{\text{キ}}$ [A] であり、抵抗 R を流れる電流は $\boxed{\text{ク}}$ [A] である。 S_1 を閉じてから十分に長い時間が経過した後、コンデンサー①には $\boxed{\text{ケ}}$ [C] の電荷が蓄えられている。この状態で S_1 を開いた。その後、十分に長い時間が経過する間に、抵抗 R で発生するジュール熱は $\boxed{\text{コ}}$ [J] である。

(2) はじめの状態に戻し、 S_2 を開いたまま S_1 を閉じた。十分に長い時間が経過した後、コンデンサー①には $\boxed{\text{サ}}$ [C] の電荷が蓄えられている。

(3) (2) の操作を行った後、 S_1 を開いてから S_2 を閉じた。十分長い時間が経過した後、コンデンサー①には $\boxed{\text{シ}}$ [C] の電荷が蓄えられている。その間に、抵抗 R で発生するジュール熱は $\boxed{\text{ス}}$ [J] である。

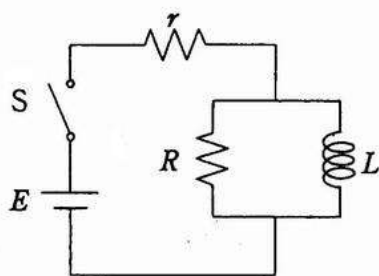


図1

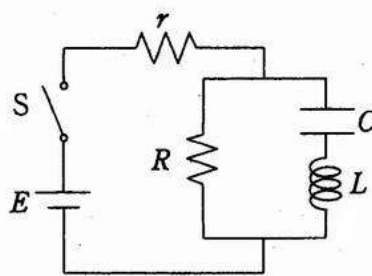


図2

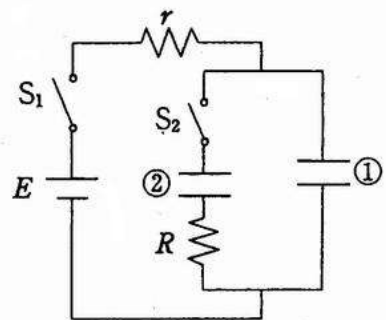


図3

入試問題研究 第167回 2002年度 広島大学 ④ コイルとコンデンサー 解答・解説

問1 十分に長い時間が経過すると電流が一定 ($\Delta I=0$)。インダクタンスの定義式 $V=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ より、

「電流変化がないとき、コイルの電圧はゼロになる」から抵抗 r を流れる電流は $\frac{E}{r}$ …(ア)

、抵抗 R を流れる電流は 0 …(イ) となる。十分に長い時間が経過する間に抵抗 R で発生

するジュール熱は、コイルに蓄えられていたエネルギーだから $\frac{1}{2}LI^2=\frac{LE^2}{2r^2}$ …(ウ) である。

問2 (1) S を閉じてから「十分に長い時間が経過しているのでコンデンサーには電流が流れない」よって、

抵抗 R に流れる電流は $\frac{E}{r+R}$ だ。また、コイルも電流が $I=0$ になり、電流変化は

$\Delta I=0$ である。よって、コイルの電圧はゼロになる(問1で説明済)。そのため、コンデンサーの電

圧は $\frac{ER}{r+R}$ になる。よって、コンデンサーのエネルギーは $\frac{1}{2}CV^2=\frac{CE^2R^2}{2(r+R)^2}$ …(エ)、コイルに

蓄えられているエネルギーは $\frac{1}{2}LI^2=0$ …(オ) である。

その後、 S を開いてから十分に長い時間が経過する間に、抵抗 R で発生するジュール熱はコン

デンサーに蓄えられているエネルギー分になるから $\frac{CE^2R^2}{2(r+R)^2}$ …(カ) である。

(2) 十分に長い時間が経過しているのでコンデンサーには電流が流れない。よって、抵抗 R の電

流は $\frac{E}{r+M}$ より、単位時間あたりに発生するジュール熱は $P=I^2R=\left(\frac{E}{r+R}\right)^2R=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$ であ

る。 $P=\frac{E^2}{r^2/R+2r+R}$ より「相加平均 $\geq$ 相乗平均」の関係を使って最大値を求めると $P=\frac{E^2}{4r}$ (

$R=r$ のとき) である。よって、消費電力が最大のときの抵抗値は $R=r$ のときだ。

問3 (1) S_2 を閉じてから S_1 を閉じた。その直後に抵抗 r を流れる電流は $\frac{E}{r}$ …(キ) であり、抵抗

R の電圧はゼロだから、抵抗 R に流れる電流は 0 …(ク) である。 S_1 を閉じてから十分に長い時間が経過した後、コンデンサー①には CE …(ケ) の電荷が蓄えられている。この状態で S_1 を開いた。このとき、両コンデンサーの電圧は等しいから、電流は流れない。よって、十分に長い時間が経過しても、抵抗 R で発生するジュール熱は 0 …(コ) である。

(2) S_2 を開いたまま S_1 を閉じたから、コンデンサー①には CE …(サ) の電荷が蓄まる。

(3) (2) の操作を行った後、 S_1 を開いてから S_2 を閉じた。十分長い時間が経過した後、コンデンサー①、②の電荷 Q_1 、 Q_2 、電圧 V_1 、 V_2 とする。電気量保存則より、 $CE=Q_1+Q_2$

…(a)、電位差との関係から $V_1=V_2$ (抵抗に電流が流れないから) が成立する。コンデンサーの

公式より $Q_1=CV_1$ 、 $Q_2=\frac{C}{2}V_2$ より、 $Q_1=\frac{2CE}{3}$ 、 $Q_2=\frac{CE}{3}$ 、 $V_1=V_2=\frac{2E}{3}$ である。

よって、コンデンサー①は $\frac{2CE}{3}$ …(シ) の電荷が蓄えられる。両コンデンサーのエネルギー和の

変化が抵抗 R で発生するジュール熱になるから $Q=\frac{1}{2}CE^2-\left\{\frac{1}{2}C\left(\frac{2}{3}E\right)^2-\frac{1}{2}\frac{C}{2}\left(\frac{2}{3}E\right)^2\right\}$ よ

り、 $Q=\frac{1}{6}CE^2$ …(ス) である。