入試問題研究　第17回　2004年　関西学院大学　③　力学

次の文章を読んで下の各問に答えよ。

図1のように物体A、Bがバネでつながれて、水平な床の上に置かれている。AとBの質量はいずれも m であり、バネの自然の長さは a 、バネ定数は k で、バネの質量は無視できる。はじめに、バネの自然の長さを保ちながら、AとBがいずれも速さ v で右の方向に運動していた。以下では床とA、Bの間の摩擦は無視できるものとする。

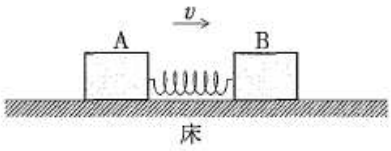

図1

(1) 図2のように、Bは静止していた質量 M の物体Cに衝突した。この衝突は完全弾性衝突であり、非常に短時間に行われたため、衝突直後のAの速度は v であった。また、衝突後にBとCが再び衝突することはなかった。床とCとの間の摩擦力は無視できるものとし、速度は右向きを正とする。

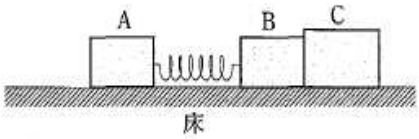

図2

(a) 衝突直後のB、Cそれぞれの速度を求めなさい。

(b) 衝突後AとBの重心は等速運動を行うが、その速度はいくらか。

(c) 衝突語AとBは重心を中心とする左右対称の単振動を行った。AとBが最も遠ざかったときの床に対するAの速度を求めなさい。また、この瞬間バネの長さはいくらになっているか求めなさい。

(2) 図3のように、BがCのかわりに動かない壁に衝突する場合を考える。ただし、この衝突は完全非弾性衝突であるとする。

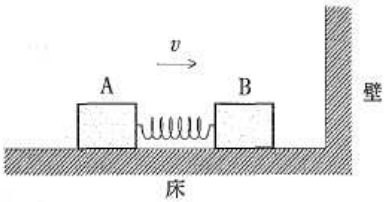

図3

(a) 衝突後しばらくの間Bは静止したままであり、Aは右に運動をし続けたが、やがて速度がゼロになった。この瞬間バネの長さはいくらになっているか。また、Bが壁に衝突した後、Aの速度がゼロになるまでにどれだけの時間が経過したか。

(b) Aは速度がゼロになった後、左に動き始め、しばらく経つとBも動き出した。Bが動き始める瞬間、バネの長さはいくらになっているか。また、その瞬間のAの速度はいくらか。ただし、速度は右向きを正とする。

(3) 図4のように、床が水平面に対して角度 θ だけ傾いており、床に対して垂直で動かない壁にBが衝突する場合を考える。この衝突は完全非弾性衝突であるとする。また、Bが壁に衝突した瞬間、バネは自然の長さであり、Aの速さは v であった。

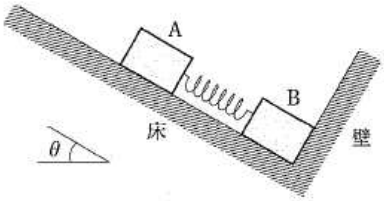

図4

(a) 衝突後しばらくの間Bは静止したままであり、Aは右下に運動し続けたが、やがて速度はゼロになった。この瞬間バネの長さはいくらになっているか。

(b) Aは速度がゼロになった後、左上に動き始め、しばらく経つとBも動き始めた。Bが動き始める瞬間、バネの長さはいくらになっているか。また、その瞬間のAの速さはいくらか。

入試問題研究　第17回　2004年　関西学院大学　③　力学　解答・解説

(1) **衝突の計算は「運動量保存の法則」と「はねかえり係数の公式」を使えばよい。**

(a) 衝突前、物体Bが右向きに v 、物体Cが静止で、衝突後に物体Bが v_B 、物体Cが v_C とする。運動量保存の法則より $mv=mv_B+Mv_C$ ・・・①、はねかえり係数の公式より、$1=-\dfrac{v_B-v_C}{v-0}$ ・・・② が成立する。①、②より、 $v_B=\dfrac{(m-M)v}{m+M}$ 、 $v_C=\dfrac{2mv}{m+M}$ になるので、衝突後の速度は、物体Bが右向きに $\dfrac{(m-M)v}{m+M}$ 、物体Cが右向きに $\dfrac{2mv}{m+M}$ である。

(b) 重心速度は $v_G=\dfrac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$ より $v_G=\dfrac{m\cdot v+m\cdot\dfrac{(m-M)v}{m+M}}{m+m}=\dfrac{mv}{m+M}$ である。

(c) AとBが最も遠ざかるとき、両者の速度は等しくなり、Aの速度は重心速度に一致し、Aの速度は $\dfrac{mv}{m+M}$ だ。 $\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{(m-M)v}{m+M}\right)^2=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{mv}{m+M}\right)^2\times2+\dfrac{1}{2}kx^2$ （力学的エネルギー保存則）が成立し $x=\pm\sqrt{\dfrac{2mM^2v^2}{k(m+M)^2}}$ だから、バネの長さは $a+\sqrt{\dfrac{2mM^2v^2}{k(m+M)^2}}$ である。

(2) **「バネの単振動は、つりあいの位置を中心とした往復運動」であることに気付けばよい。**

(a) 物体Aの速度がゼロのときのバネの縮みを x とする。力学的エネルギー保存の法則より $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}kx^2$ になるから、 $x=\sqrt{\dfrac{mv^2}{k}}$ より、バネの長さは $a-\sqrt{\dfrac{mv^2}{k}}$ である。

物体Aはバネの自然の長さを中心として単振動運動になるので、この場合は4分の1周期に相当する。この単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ だから、衝突してからAの速度がゼロになるまでの時間は $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

(b) Bが動き出すのは左にバネが引き始めるときだから、バネが「自然の長さ a 」になったとき、物体Bは動き始める。力学的エネルギー保存の法則を考える。バネのエネルギーは無い（自然長だから）ので、速さは同じになる。よって、物体Aの速度は左向きだから、 $-v$ である。

(3) **物体Bが壁から離れるには斜面を上に引く力 $mg\sin\theta$ が必要であることに注意。**

(a) 物体Aが速度ゼロのとき、バネの縮みを x （ $x>0$ ）とし、力学的エネルギー保存の法則より $\dfrac{1}{2}mv^2=-mgx\sin\theta+\dfrac{1}{2}kx^2$ である。これより $x=\dfrac{mg\sin\theta\pm\sqrt{(mg\sin\theta)^2+kmv^2}}{k}$ だから、 $a-\dfrac{mg\sin\theta+\sqrt{(mg\sin\theta)^2+kmv^2}}{k}$ 縮んでいる。

(b) Bが上に動き始めるにはバネの力が $mg\sin\theta$ 必要だ。バネの伸びは $x=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$ 必要だから、バネの長さは $a+\dfrac{mg\sin\theta}{k}$ である。また、力学的エネルギー保存の法則が成立するので $\dfrac{1}{2}mv^2=mgx\sin\theta+\dfrac{1}{2}kx^2+\dfrac{1}{2}mv_A^2$ だから、 $v_A=\sqrt{v^2-\dfrac{3mg^2\sin^2\theta}{k}}$ である。