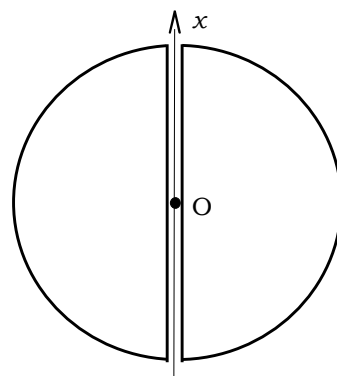


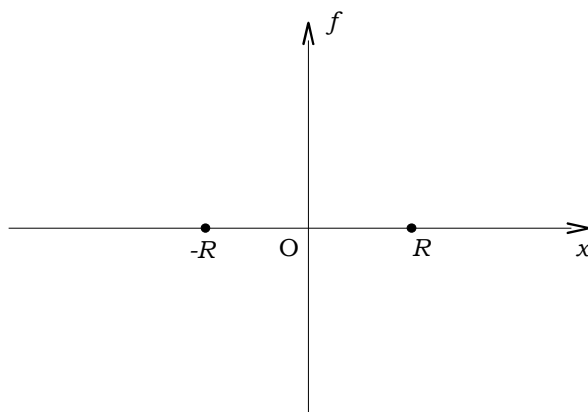
入試問題研究 第171回 2005年 名古屋大学 ① 力学

図に示すような、球状の惑星 Q の中心 O を通るまっすぐな細い穴を考える。この穴に沿って O 点を原点とする x 軸をとる。図1で穴の下端と上端の x 座標の値はそれぞれ $-R$ と R である。穴の占める体積は惑星 Q の体積に比べて無視することができる。惑星 Q の質量 M は $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ であるとする。ただし、



ρ は惑星 Q の密度で一定であり、 R は惑星 Q の半径である。また、惑星 Q には大気がなく、自転していないものとする。万有引力定数を G として、以下の問いに答えよ。

- (1) x 軸上の位置 $x \geq R$ にある質量 m の物体 A に働く力 f と、力 f による位置エネルギー U を答えよ。ただし、 x 軸正の方向に働く力の符号を正ととれ。
- (2) 惑星 Q の表面 ($x=R$) から x 軸正方向に物体 A を速さ v_0 で発射して、 $x=3R$ の位置まで到達させる。このため必要な最小の初速 v_0 を求めよ。
- (3) 物体 A が穴の中の位置 x ($-R < x < R$) にある場合に、惑星 Q から受ける力 f を考える。 O を中心とする半径 $|x|$ の球内の質量を M' とすると、力 f は惑星の中心 O に集中した質量 M' から物体 A が受ける万有引力に等しい。質量 M' と力 f を求めよ。ただし、 f については、 $0 \leq x < R$ と $-R < x < 0$ の場合に分けて答えよ。
- (4) 物体 A に働く力 f を x の関数として、グラフに表せ。グラフには $x=\pm R$ の位置での f の値も記入せよ。
- (5) 惑星 Q の表面から物体 A を初速ゼロで穴に落とした場合、物体 A は単振動をする。その理由を述べよ。
- (6) (5) の場合に、物体 A が惑星表面から中心 O に最初に到達するまでの時間 t_1 と、中心 O における速さ v_1 を求めよ。
- (7) 物体 A を惑星中心 O から、 x 軸の正方向に速さ v_2 で発射し、惑星 Q の表面を通り越して $x=3R$ の位置まで到達させる。このための最小の初速度 v_2 を求めよ。



入試問題研究 第171回 2005年 名古屋大学 ① 力学 解答・解説

(1) 万有引力の法則 $f = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ より、物体 A に働く力は $f = -G \cdot \frac{M m}{x^2}$ だから

$f = -\frac{4\pi\rho G m R^3}{3x^2}$ である。万有引力による位置エネルギーの公式 $f = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r}$ (無限遠方を基準とする) より、

$U = -G \cdot \frac{M m}{x}$ だから $U = -\frac{4\pi\rho G m R^3}{3x}$ である。

(2) 力学的エネルギー保存の法則より、 $\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M m}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{3R}$ が成立する。

$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M m}{R} + G \frac{M m}{3R} = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$ だから $v_0 \geq \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$ である。よって、 $x = 3R$

に到達するため必要な最小の初速は $v_0 = \sqrt{\frac{4GM}{3R}} = \frac{4R\sqrt{\pi\rho G}}{3}$ をである。

(3) 物体 A が $-R < x < R$ にある場合、惑星 Q から受ける力 f は、O を中心とする半径 $|x|$

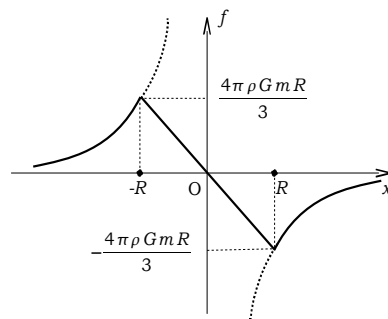
の球内の質量を M' としたときの物体 A が受ける万有引力に等しい。質量 $M' = \frac{4}{3}\pi\rho x^3$ だから、力 f の大きさ

は $f = \frac{-4\pi\rho G m \cdot |x|}{3}$ である。なお、位置が $0 \leq x < R$

と $-R < x < 0$ とともに、力の向きは原点 O の向きである。

(4) $x = \pm R$ の位置での力 f の値は、(1) に代入して

$f = \pm \frac{4\pi\rho G m R}{3}$ である。



(5) 惑星 Q の表面から物体 A を初速ゼロで穴に落とした場合、 $-R < x < R$ での運動だから、物体 A に働く力は $f = -\frac{4\pi\rho G m \cdot x}{3}$ だから、「O 点からの変位に比例する復元力が働いている」ので、物体 A は「原点 O を中心とする単振動」となる。

(6) 物体 A の運動方程式は $ma = -\frac{4\pi\rho G m \cdot x}{3}$ だから、 $a = -\frac{4\pi\rho G}{3} \cdot x$ である。単振動の

公式 $a = -\omega^2 x$ より、角振動数は $\omega = 2\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ である。よって、この単振動の周期は

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ だから、 $T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ である。よって、物体 A が惑星表面から中心 O に最初に到達

するまでの時間 t_1 は周期の4分の1だから、 $t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ である。また、単振動の中心

での速度は $v_0 = A\omega$ であるから、O における速さは $v_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ である。

(7) (2)より、位置 $x = R$ における速度が $v_0 = \frac{4R\sqrt{\pi\rho G}}{3}$ であれば、位置 $x = 3R$ に到達で

きる。O 点から位置 $x = R$ に達するまでに必要なエネルギーは $\frac{1}{2} m v_1^2$ であるから、O 点

での運動エネルギーは $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$ あればよい。よって $\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$ が

成立するから $v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_0^2}$ である。代入整理してやると、 $v_2 = \frac{2R\sqrt{7\pi\rho G}}{3}$ である。