

入試問題研究 第172回 2005年 金沢大学 ② 「力学」

一端が直角に曲げられた、長さ a [m] の硬いレールがある。このレールを、図2のように、鉛直下向きから角度 θ ° 傾けて地面上に保持した。このレールの別端のA点に、質量 m [kg] の小球を載せて静かに離したところ、小球は回転せずにレール上をすべり降り、点Oに到達した。その直後、小球は 90° 向きを変えてレールを飛び出し、最高点Pを経由して地面上の点Bに達した。この一連の運動に対して以下の問いに答えよ。

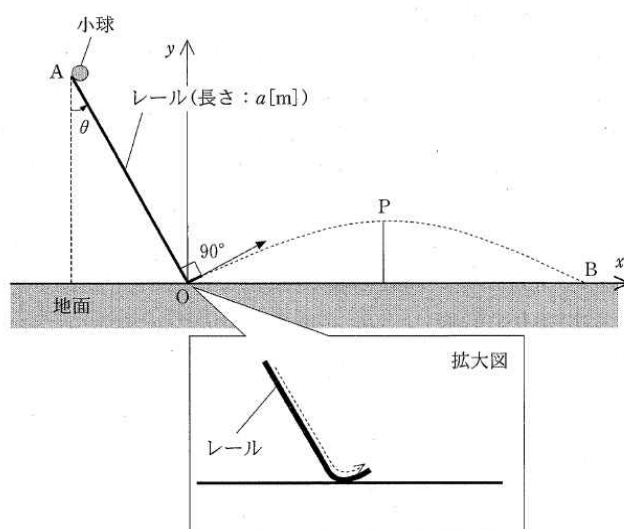


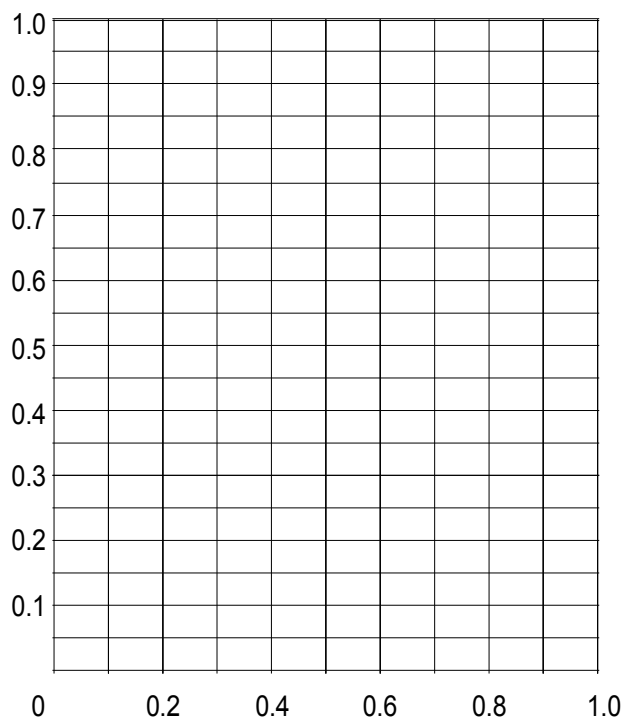
図2

ただし、図2に示すように点Oを原点として、 x 軸を点B方向に y 軸を鉛直上方向にとり、鉛直下向きの重力加速度を g [m/s²] とする。レールと小球との摩擦、小球の運動に対する空気抵抗の影響はない。また、レールは十分に長く、レールの厚みは無視できる。最下点Oにおける曲げられた部分は、拡大図に示すように小球の運動方向をなめらかに変えることができる。

- (1) レールから飛び出した直後における、小球の x 方向の速さと y 方向の速さをそれぞれ求めよ。
- (2) 小球が点Oから点Pに達するまでの時間を求めよ。
- (3) 点Pとの距離(最高点の高さ)を求めよ。
- (4) OB間の距離を求めよ。

次に、レールの長さ a が 1 [m] である場合について、以下の問に答えよ。

- (5) 「点Aの高さ」(点Aの地面からの距離)に対する
- (6) 「最高点の高さ」(点Pと地面からの距離)の関係を、グラフに示せ。ただし、点Aの高さ 0.2、0.4、0.6 および、0.8 [m] の点をそれぞれ黒丸で示し、実践で結べ。
- (7) 「最高点の高さ」が最大になるときの点Aの高さを、有効数字1桁で求めよ。



入試問題研究 第172回 2005年 金沢大学 ② 「力学」 解答・解説

(1) 力学的エネルギー保存の法則より $mg a \cos \theta = \frac{1}{2} m v^2$ が成立するから、小球の x 方向の速さは $\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \cos \theta$ [m/s] と y 方向の速さは $\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta$ [m/s] である。

(2) 等加速度運動の公式より $0 = \sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta - gt$ が成立するから、小球が点 O から点 P に達するまでの時間は $t = \frac{\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta}{g}$ [s] である。

(3) 等加速度運動の公式より $0^2 - (\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta)^2 = 2 \times (-g) \times h$ だから、最高点の高さは $h = a \cos \theta \sin^2 \theta$ である。

(4) B 点に達するまでの時間は $\frac{2\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta}{g}$ (最高点までの時間の2倍)だから、OB 間までの距離は $\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \cos \theta \times \frac{2\sqrt{2ga \cos \theta} \cdot \sin \theta}{g} = 4a \cos^2 \theta \sin \theta$ である。

(5) 「最高点の高さ」(点 P と地面からの距離)は

$$h = \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \text{ である。}$$

点 A の高さ 0.2 ($\cos \theta_1 = 0.2$)、

0.4 ($\cos \theta_2 = 0.4$)、0.6 ($\cos \theta_3 = 0.6$)

および 0.8 ($\cos \theta_4 = 0.8$) [m] だから

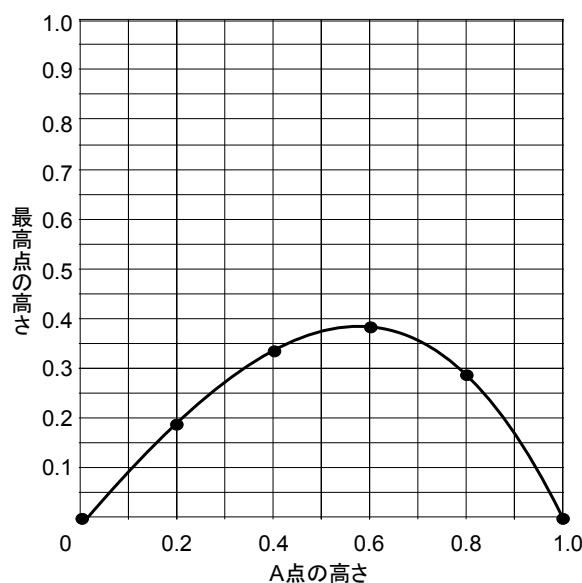
$$h_1 = 0.2 \times (1 - 0.2^2) = 0.192 \text{ ,}$$

$$h_2 = 0.4 \times (1 - 0.4^2) = 0.336 \text{ ,}$$

$$h_3 = 0.6 \times (1 - 0.6^2) = 0.384 \text{ ,}$$

$$h_4 = 0.8 \times (1 - 0.8^2) = 0.288 \text{ である。}$$

グラフに記入すると、右図となる。



(6) 右図より、「最高点の高さ」が最大になるのは、

点 A の高さが 0.57 [m] 程度だから 0.6 [m]

で、最高点の高さは 0.38 [m] であるから、0.4 [m] である。(共に有効数字1桁だから)

※ 正確に求めると、 $h = \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$ だから、 $x = \cos \theta$ と置いて $h = x - x^3$ である。微分して $h' = 1 - 3x^2$ だから $x = \frac{\pm \sqrt{3}}{3}$ で極値をとる。 x の変域は $0 < x < 1$ だから、増減表

を作ると $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\dots$ で最大値となることが分かる。よって、最高点の高さは

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.384\dots \text{ となる。}$$