入試問題研究 第 179 回　2006 年 慈恵医科大学 ① 力学

質量 m の小球 A と質量 $2m$ の小球 B を、ばね定数 k の軽いばねの両端に固定し、図 1 のように、なめらかな水平面上を、鉛直な壁に向けて移動させた。移動の向きに座標軸をとると、小球 A と B の速度は一定でともに v_0 であった。小球 B は壁と垂直に衝突し、図 2 のように、衝突直後の速度は $-\dfrac{v_0}{2}$ であった。衝突後、ばねは縮み、小球 A と B が一瞬静止したとき、図 3 のように、小球 B は壁から s の距離にあった。その後、小球 B は壁と二度目の衝突をした。

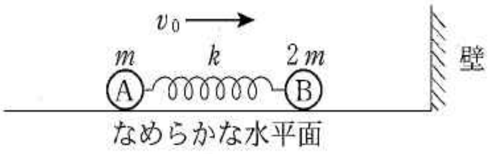

図 1

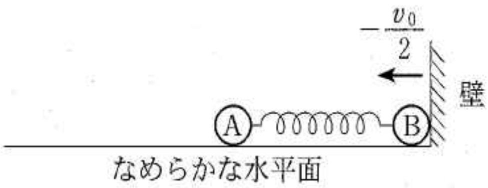

図 2

問 1．小球 B と壁との間の反発係数（はねかえり係数）はいくらか。

図 3

問 2．一度の衝突から二度目の衝突までの間、小球 A と B の重心の速さはいくらか。

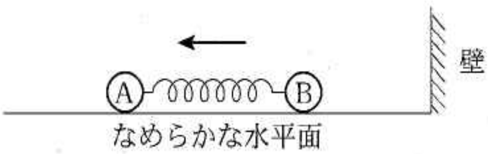

図 4

二度目の衝突後、ばねの伸び縮みをしながら、小球 A と B は図 4 のように左向きに移動した。この運動を、小球 A と B の重心 G からみると、小球 A と B がそれぞればね定数 k_A と k_B のばねを介して重心 G につながれ、同じ振動数 f で単振動をしているように見えた。

問 3．ばね定数 k_A と k_B を k を用いてそれぞれ表せ。

問 4．振動数 f を k と m を用いて表せ。

問 5．図 3 の距離 s を k、m、v_0 を用いて表せ。

問 6．小球 B が二度目の衝突をした後、重心 G の速度はいくらか。

問 7．小球 B が壁と二度目の衝突をした後、ばねが縮むとき、自然長から最大 x の長さだけ縮んだ。x を k、m、v_0 を用いて表せ。

入試問題研究 第179回　2006年 慈恵医科大学 ① 力学　　解答解説

問1．反発係数（はねかえり係数）公式 $e=-\dfrac{v'}{v}$ に代入して求めればよい。 $e=\dfrac{1}{2}$ である。

問2．一度の衝突から二度目の衝突までの間、水平方向外力が働かないので、重心速度は一定である。一度目の衝突直後の速度は、小球Aが v_0 、Bが $-\dfrac{v_0}{2}$ を「重心の速度の公式」$v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ に代入すればよい。 $v_G=0$ より、重心の速度はゼロである。

※ 位置を時間で微分すると速度だから、重心の公式 $x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ から簡単に導ける。

問3．振動数が同じだから $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_A}}=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k_B}}$ より $k_B=2k_A$ である。直列に連結すると、ばね定数 k だから $\dfrac{1}{k_A}+\dfrac{1}{k_B}=\dfrac{1}{k}$ が成立する。よって、 $k_A=\dfrac{3}{2}k$ 、 $k_B=3k$ である。

※ k_1 、 k_2 のばねを連結し力 f で引く。張力は等しいので $f=k_1x_1$ 、 $f=k_2x_2$ が成立する。また、連結ばねの伸びは $x=x_1+x_2$ である。連結ばね定数を k とすると $f=kx$ だから、ばね定数の間には $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{k}$ の関係が成立している！

問4．周期の公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ より $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ だから、振動数は $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$ だ。

問5．壁に衝突したときは自然長時（単振動の中心位置）、一瞬静止時は端だから振幅だけ縮んでいる。小球Bは、質量 $m_B=2m$ 、ばね定数 $k_B=3k$ 、中心速度は $-\dfrac{v_0}{2}$ だったから、エネルギー保存の法則 $\dfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 3k\cdot x^2$ より、ばねの縮みは $x=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ である。よって、小球Bは壁からの距離 s が $\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ である。

問6．小球Bが二度目の衝突する直前の速度は $\dfrac{v_0}{2}$ で、反発係数が $\dfrac{1}{2}$ だから、衝突後は $-\dfrac{v_0}{4}$ である。そのとき、小球Aの速度は $-v_0$ だから、 $v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ （重心の速度の公式）に代入して、二度目の衝突後の重心速度は $v_G=-\dfrac{v_0}{2}$ である。

問7．エネルギー保存の法則より $\dfrac{1}{2}mv_0^2+\dfrac{1}{2}2m\left(\dfrac{v_0}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}(m+2m)\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}kx^2$ が成立する。よって、ばねの最大の縮みは $x=v_0\sqrt{\dfrac{3m}{8k}}$ である。

※ 単振動の振幅 A と中心速度 v_0 の関係は $v_0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より、 $A=v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を利用するとよい。

小球Aの単振動では $A_A=\left|v_0-\dfrac{v_0}{2}\right|\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ 、小球Bの単振動では $A_B=\left|\dfrac{v_0}{4}-\dfrac{v_0}{2}\right|\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}=\dfrac{v_0}{4}\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ より、連結ばね全体での最大のばねの縮みは、 $A=A_A+A_B=\dfrac{3v_0}{4}\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$ である。 重心から見た速度に注意！