入試問題研究　第18回　2004年　関西大学　①　力学　　問題

Ⅰ　次の文章を読んで空欄に適当な数式を入れなさい。

自然の長さが L 、ばね定数が k の軽いばねを滑らかで広い水平面上に横たえ、その一端を点Aに固定して、他端には質量が m の小球Pをしっかりと取り付けた（図1参照）。また、別に質量がPと同じ m の小球Q、Q'を用意した。空気の影響は無視できるものとして、この床面上のPの運動を考察しよう。

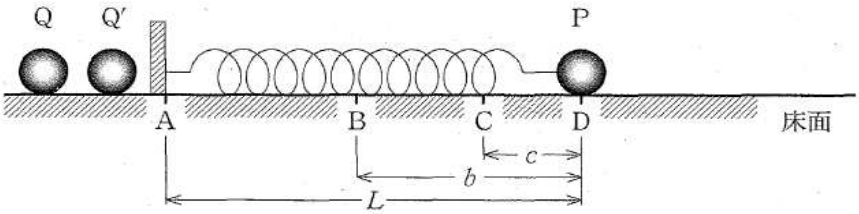

図　1

(1)　バネを長さ b だけ縮めて点Bに静止させておいたPを静かに放すと、Pは点Cを速さ [(a)] で通過した後、Pを離してから時間 [(b)] 後に点Dを通過する。このことは、Pの運動は点 [(c)] を中心とする振幅 [(d)] 、周期 [(e)] の単振動であるから、当然のことである。

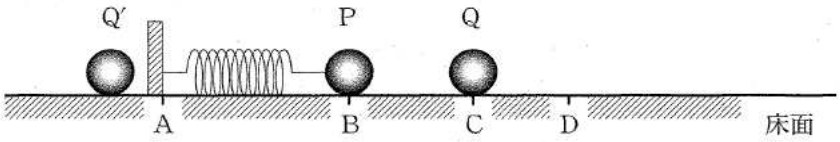

図　2

(2)　(1)と同様にして、PをBに静止させ、さらに、CにQを置いて（図2参照）、Pを静かに放したところ、P、QはCで衝突後、接触したまま運度を続けて、Dで離れた。このことから、P、Qの速さは、Cでの衝突直後では、 [(f)] 、Dで離れる直前では、 [(g)] であったことが分かる。また、PはDから距離 [(h)] だけ離れた点に到達した後、折り返すことになる。

(3)　次に、(2)と同様にPをBに静止させ、QをQ'に置き換えて、Pを静かに放したところ、床面上でPはQ'に2回衝突した。1回目はCで起き、その直後、Pは一瞬静止し、2回目はDで起きた。このことから、1回目の衝突直後のQ'の速さは [(i)] で、その後、時間 [(j)] だけ経過して、2回目の衝突が起きたことが分かる。また、このような衝突はいつでも起きるわけではなく、 $b=$ [(k)] $\times c$ の場合に限られる。

入試問題研究　第18回　2004年　関西大学　①　力学　　解答・解説

Ⅰ　運動量保存の法則、力学的エネルギー保存の法則、単振動を含む総合問題。

(1)　力学的エネルギー保存の法則（ばねのエネルギーと運動エネルギーの和が一定）より、P が点 C を通過する速さを v とすると、$\frac{1}{2}kb^2=\frac{1}{2}kc^2+\frac{1}{2}mv^2$ が成立する。よって、P が点 C を通過するときの速さは $\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}$ ･･･(a) になる。このときの P の運動は、点「D」･･･(c) を中心とし、振幅が b ･･･(d) 、周期が $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ･･･(e) の単振動になる。よって、点 D を通過するまでの時間は、単振動の周期の 4 分の 1 に相当する。これより、点 D を通過する時刻は $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ ･･･(b) になる。

(2)　点 C で同じ質量の Q と完全非弾性衝突を起こす。衝突前の P の速度は $\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}$ だから、衝突後の速度を v' とすると、運動量保存の法則 $m\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}=(m+m)v'$ 成立し、衝突後の速度は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}$ ･･･(f) である。P、Q が点 D を通過する速度を v_{PQ} とすると、力学的エネルギー保存の法則より $\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}\right)^2+\frac{1}{2}kc^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_{PQ}^2$ が成立するので、衝突後一体となった P、Q が点 D の通過速度は $v_{PQ}=\sqrt{\frac{k(b^2+c^2)}{4m}}$ ･･･(g) である。点 D を通過後、P がばねを最も伸ばした長さを x とする。力学的エネルギー保存の法則 $\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{k(b^2+c^2)}{4m}}\right)^2=\frac{1}{2}kx^2$ が成立するので、ばねの伸びは $x=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ ･･･(h) である。

(3)　Q' に置き換えたとき、Q' との 1 回目の衝突後、P は静止し、2 回目の衝突は単振動の中心（点 D）で起きるから、衝突の 1 回目と 2 回目の時間間隔は単振動の周期の 4 分の 1 に相当する。よって、その時間間隔は $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ ･･･(j) である。その間に Q' が c 移動しているので、Q' の速さは $c\div\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{2c}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ･･･(i) になる。

P と Q' の衝突において運動量保存の法則 $m\cdot\sqrt{\frac{k(b^2-c^2)}{m}}=m\cdot\frac{2c}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ が成立する必要がある。これより、$\sqrt{b^2-c^2}=\frac{2c}{\pi}$ であるので、$b=c\sqrt{\frac{4}{\pi^2}+1}$ が成立する必要がある。よって、$\sqrt{\frac{\pi^2+4}{\pi^2}}$ ･･･(k) である。