入試問題研究　第181回　1997年　神戸大学　③　光（4スリットの干渉）

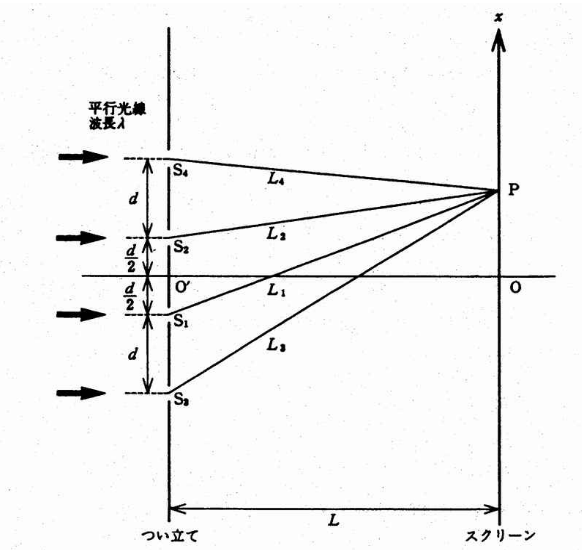

図　1

光の干渉について考えよう。図1のように4つのスリット S_1 ～ S_4 を持つつい立てとスクリーンがある。スリットの左からはつい立てに垂直に単一波長 λ の平行光線がくるとする。スリット S_i のみ開けて他を閉じた場合を考えよう。図のようにスクリーン上の点Oを原点とした点Pの座標を x とする。つい立てとスクリーンの間の距離 L はOPの長さに比べて十分大きく、スリット S_i からの時刻 t における光波は点P上で $F_0=A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_i}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$ （$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）とあらわせるとする。ここで L_i は S_i とPの距離、λ は波長、T は周期、A は時間によらない振幅である。強度 I_0 は、F_0 の2乗の時間的平均 $\langle F_0^2\rangle$ で与えられ、交流の実効値の計算と同様に、$I_0=\langle F_0^2\rangle = A^2\left\langle \sin^2 2\pi\left(\dfrac{L_i}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)\right\rangle=\dfrac{A^2}{2}$ であることが知られている。

まず、S_3、S_4 を閉じて、S_1、S_2 からの光波のみを考える。$L_1^2-L_2^2$ を x、d であらわすと、$L_1^2-L_2^2=$ $\boxed{（ア）}$ である。L は d や $|x|$ に比べ十分に大きいので、$L_1+L_2\approx 2L$ と考えてよい。したがって、$L_1-L_2=$ $\boxed{（イ）}$ となる。点Pでの S_1 と S_2 からの光波の合成を調べると、

$$F_1=A\sin 2\pi\left(\frac{L_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\frac{L_2}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)=\boxed{（ウ）}\cdots(1)$$

となり、スクリーン上の強度 I_1 は F_1^2 の時間的平均であるから、$I_1=2A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)$ となる。この強度は x に関して図2-(a) のように振る舞い、スクリーン上には干渉縞が現れる。

この結果、明線と暗線の位置 x は $x=\dfrac{L\lambda}{2d}\times\begin{cases}2m & \text{明線}\\ 2m+1 & \text{暗線}\end{cases}$ （$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）と表される。

次に、S_1、S_2 を閉じて、S_3、S_4 を開け、点Pでの S_3、S_4 からの光波の合成を調べると

$$F_2=A\sin 2\pi\left(\frac{L_3}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\frac{L_4}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)=\boxed{（エ）}\cdots(2)$$

となり、スクリーン上の強度 I_2 は F_2^2 の時間的平均であるから、$I_2=$ $\boxed{（オ）}$ となる。この場合、明線の間隔は I_1 に比べて、$\boxed{（カ）}$ 倍になる。

さらに、S_1、S_2、S_3、S_4 を開けた場合の点Pでの光波の合成を調べると、

$$F_3=A\sin 2\pi\left(\frac{L_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\frac{L_2}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\frac{L_3}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\frac{L_4}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)=\boxed{（キ）}\cdots(3)$$

である。スクリーン上の強度 I_3 は F_3^2 の時間的平均であるから、$I_3=$ $\boxed{（ク）}$ となる。

この結果、式(3) の最大値は式(1) の最大値の $\boxed{（ケ）}$ 倍であることがわかる。

ここでは、4つのスリットの場合まで調べたが、これを等間隔に並んだ多数のスリットの場合に拡張すれば、スリットの数が多いほど明線が鋭く現れることがわかる。

必要ならば $\sin\theta_1+\sin\theta_2=2\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$、$\cos\theta_1+\cos\theta_2=2\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$ を用いなさい。

問１　上の文中の空欄に A 、d 、L 、t 、x 、λ を用いた式または数値で埋めなさい。

問２　(2) と (3) に対応するグラフを下の図(a) 〜(f) の中から選びなさい。

問３　単色光の変わりに白色光を用いると干渉縞はどうなるか説明しなさい。

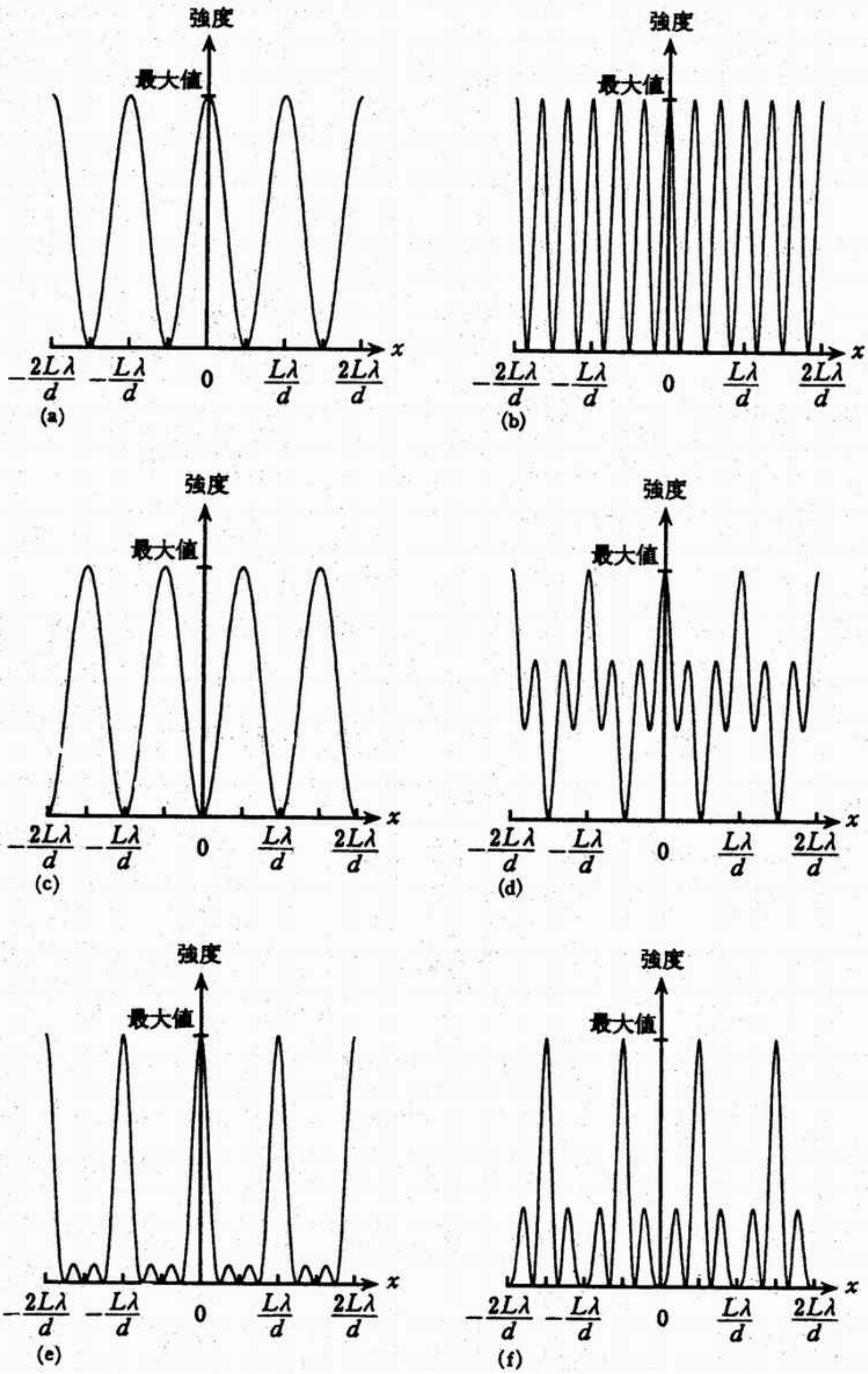

図　2

入試問題研究　第 181 回　1997 年　神戸大学　③　光（4スリットの干渉）　解答・解説

問 1　**［ここは小手調べ！］ 最初に、スリット S_3、S_4 を閉じて、S_1、S_2 からの光波の合成を考える。**

三平方の定理より　$L_1^2=L^2+(x+\dfrac{d}{2})^2$　、　$L_2^2=L^2+(x-\dfrac{d}{2})^2$　より　$L_1^2-L_2^2=2xd$　・・・(ア) である。L は d や $|x|$ に比べ十分に大きいので　$L_1+L_2\approx 2L$　と考えてよい。よって　$L_1-L_2=\dfrac{xd}{L}$　・・・(イ) である。

点 P での S_1 と S_2 からの光波の合成　$F_1=A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$ より、和積変換公式を使って1つにまとめると、$F_1=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{L_1-L_2}{2\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_2}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$ になり、(ア)、(イ)を代入して、

$F_1=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$　・・・(ウ) となる。

スクリーン上の強度　I_1　は　F_1^2　の時間的平均であるから、振幅に相当する部分の 2 乗の値の　$\dfrac{1}{2}$　になる（問題文中に明示している！）から、　$I_1=2A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)$　である。よって、強度最大が明線の位置だから、明線の条件は　$\dfrac{xd}{2L\lambda}=\dfrac{m}{2}$（$m$ は整数）だから、明線の位置は　$x=\dfrac{mL\lambda}{d}$、明線の間隔は　$\Delta x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$　である。同様に強度ゼロが暗線の位置だから、暗線の条件は　$\dfrac{xd}{2L\lambda}=\dfrac{2m+1}{4}$（$m$ は整数）だから、暗線の位置は　$x=\dfrac{(2m+1)L\lambda}{2d}$、暗線の間隔も　$\Delta x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$　である。同様に、

この強度は図 2-(a) のようになり、スクリーン上には干渉縞が現れ、明線と暗線の位置 x は

$$x=\frac{L\lambda}{2d}\times\begin{cases}2m & \text{明線}\\ 2m+1 & \text{暗線}\end{cases}$$（ $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ ）となることが分かる。

［ここも小手調べ！］ 次に、S_1、S_2 を閉じて、S_3、S_4 を開け、点 P での光波の合成を調べる。

前述と同じように調べる。三平方の定理より　$L_1^3=L^2+(x+\dfrac{3d}{2})^2$　、　$L_4^2=L^2+(x-\dfrac{3d}{2})^2$　より　$L_3^2-L_4^2=6xd$　である。また、L は d や $|x|$ に比べ十分に大きいので　$L_3+L_4\approx 2L$　と考えてよい。よって、　$L_3-L_4=\dfrac{3xd}{L}$　である。

二つの光波の合成より　$F_2=A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_3}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_4}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$　だから、和積変換公式を使って1つにまとめると、$F_2=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{L_3-L_4}{2\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_3+L_4}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$　になる。　$L_3+L_4\approx 2L$　、　$L_3-L_4=\dfrac{3xd}{L}$ を代入して、　$F_2=A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_3}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_4}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{3xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$　・・・(エ) となる。

スクリーン上の強度　I_2　は　F_2^2　の時間的平均で、振幅に相当する部分の 2 乗の値の　$\dfrac{1}{2}$　になるから　$I_2=2A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{3xd}{2L\lambda}\right)$　・・・(オ) である。強度最大（明線の位置）は　$\dfrac{3xd}{2L\lambda}=\dfrac{m}{2}$（$m$ は整数）だから、明線の間隔は　$\Delta x_2=\dfrac{L\lambda}{3d}$　より、　I_1　の　$\Delta x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$　に比べて、このときの明線の間隔は　$\dfrac{1}{3}$　・・・(カ) 倍 である。

［ここからが本論！］ 最後に、4つのスリット S_1 、S_2、S_3 、S_4 を全てを開けた場合の点 P での光波の合成を調べる。

まず、S_1 と S_3 の光波の合成を、次に S_2 と S_4 の光波の合成し、それらをさらに合成する手順をとる。

S_1 と S_3 の合成： $A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_3}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_3}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$

S_2 と S_4 の合成： $A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+A\sin 2\pi\left(\dfrac{L_4}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2+L_4}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$

さらに $F_3=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_3}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2+L_4}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$ となる。

$F_3=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\left\{\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_3}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2+L_4}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)\right\}$ より、中括弧の部分を合成して

$\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_3}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)+\sin 2\pi\left(\dfrac{L_2+L_4}{2\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)=2\sin 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_2+L_3+L_4}{4\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)\cdot\cos 2\pi\left(\dfrac{L_1+L_3-L_2-L_4}{4\lambda}\right)$

である。

ここで、 $L_1-L_2=\dfrac{xd}{L}$ 、 $L_3-L_4=\dfrac{3xd}{L}$ より $L_1+L_3-L_2-L_4=\dfrac{4xd}{L}$ が成立する。また、$L_1+L_2+L_3+L_4=4L$ も成立する。よって、以上の関係式を F_3 に代入して整理すると、4 つのスリットからの光波は $F_3=2A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\left\{2\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{L\lambda}\right)\cdot\sin 2\pi\left(\dfrac{L}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)\right\}$ ・・・(キ) と表すことができる。

振幅に相当する部分は $4A\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cdot\cos 2\pi\left(\dfrac{xd}{L\lambda}\right)$ であるので、スクリーン上の強度 I_3 は F_3^2 の時間的平均をとればよい。光の強度は振幅に相当する部分の 2 乗の $\dfrac{1}{2}$ になるので、4 つのスリットからの光波の強度は $I_3=8A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{L\lambda}\right)$ ・・・(ク) と表すことができる。

よって、4 スリットからの光波の強度の最大値は $8A^2$ となることがわかる。また、2 スリットからの光波の強度 $I_1=2A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)$ の最大値は $2A^2$ であるから、4 スリットのときの強度と 2 スリットのときの強度の比は 4 倍 ・・・(ケ) である。 **※ いずれの場合も最大値は $x=0$ のときなど**

問 2 **消去法でそれぞれのグラフを消去してゆけば、簡単に選別できる！**

(2) に対応するグラフ： 光波の強度は $I_2=2A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{3xd}{2L\lambda}\right)$ であるので、 $\dfrac{3xd}{2L\lambda}=\dfrac{1}{4}$ でゼロになる。よって、 $x=\dfrac{L\lambda}{6d}$ で $I_3=0$ であることから、(b) のグラフであると判別できる。

(3) に対応するグラフ： 光波の強度は $I_3=8A^2\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{2L\lambda}\right)\cos^2 2\pi\left(\dfrac{xd}{L\lambda}\right)$ であるので、$x=0$ で強度は最大となる。 $\dfrac{xd}{2L\lambda}=\dfrac{1}{4}$ 、 $\dfrac{xd}{L\lambda}=\dfrac{1}{4}$ で強度がゼロだから、 $x=\dfrac{L\lambda}{2d}$ 、 $x=\dfrac{L\lambda}{4d}$ で $I_3=0$ である。以上より、(e) のグラフであると判別できる。

問 3 単色光の代わりに白色光を用いると、白色光は波長の長い「赤」から、「橙」、「黄」、「緑」、「青」、と続き、もっとも波長が短い「紫」までの光を含んでいる。中央の明線（$x=0$）は、全ての光で明線の位置は、同じになるから、全ての色が含まれる白色明線になる。しかし、中央から離れた明線は、波長の違いで明線の位置がずれる。そのため、中央より紫、青、緑、黄、橙、赤の順に並ぶ。中央より離れた明線の位置ほどそのずれは大きくなる。