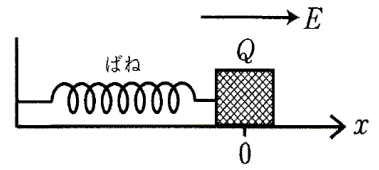


入試問題研究 第182回 慶応大学 理工学部 ① ばねとおもりの運動

水平な床の上にはばね定数 k の軽いばねに横たえ、一端を固定し、他端に質量 m の小さなおもりをつける。図のように、ばねに沿って x 軸をとり、おもりの位置を x で表す。ばねが自然長のとき、おもりの位置を $x = 0$ とする。おもりは正の電荷 Q を帯びており、 x 方向の一樣な電場 E ($e > 0$) をかけたり切ったりしたときのおもりの運動を考える。ばねは十分長いものとする。重力加速度の大きさを g とする。



次の文章の に適切な数または式を記入しなさい。(オ)については解答欄にグラフを書きなさい。

(1) 床が滑らかな場合を考える。

(i) 電場 E をかけている場合を考える。おもりのつりあいの位置を $x = L$ とすると、 $L = \text{〔ア〕}$ である。おもりが動いているとき、その運動の中心が $x = L$ 、周期が $T = \text{〔イ〕}$ の単振動とみなすことができる。

(ii) 時刻 $t = 0$ でおもりは $x = 0$ に静止していた。 $0 < t \leq \frac{T}{2}$ の間電場 E をかけた。時刻 $t = \frac{T}{2}$

でのおもりの位置は $x = \text{〔ウ〕} \times L$ である。次に、 $\frac{T}{2} < t \leq T$ の間電場を切る。おもりは中心が

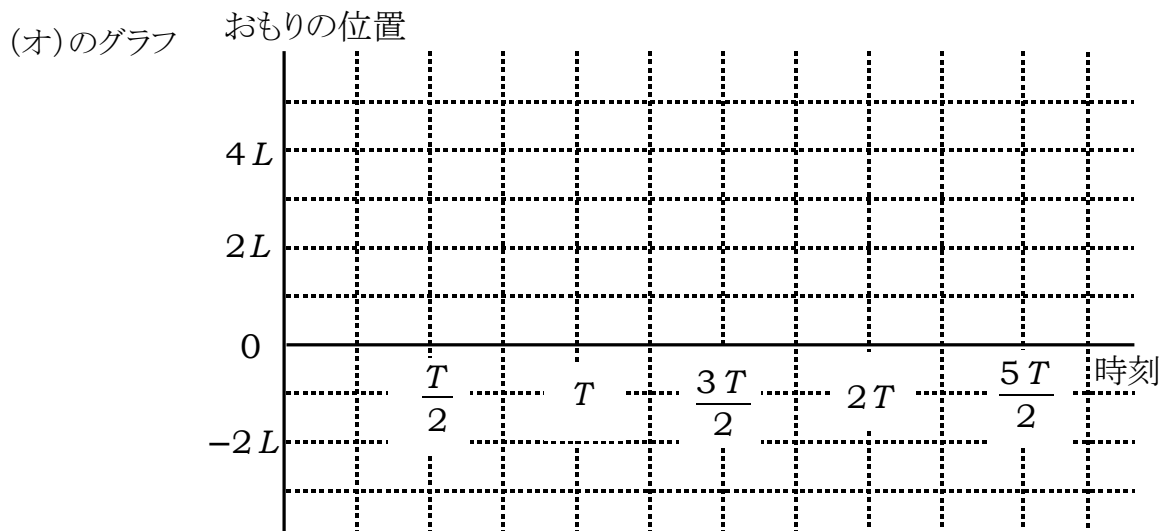
$x = 0$ 、振幅が $\text{〔エ〕} \times L$ の単振動をする。 $T < t \leq \frac{3T}{2}$ で再び電場 E をかける。

$0 \leq t \leq \frac{3T}{2}$ でのおもりの位置 x を、時間 t の関数として(オ)に図示しなさい。

(2) おもりと床との間に摩擦力がはたらく場合を考える。静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とする。

時刻 $t = 0$ でおもりは $x = 0$ に静止していた。 $t > 0$ で電場をかけるとおもりは動き始めた。おもりが x の正の向きに動いているとき、位置 x でおもりに働く力は $F = \text{〔カ〕}$ である。その後おもりは時刻 $t = \frac{T}{2}$ で動かなくなった。そのときのおもりの位置は $x = \text{〔ウ〕} \times L - \text{〔キ〕}$ である。以上

のことから、 $\mu' = \frac{\mu}{2}$ のとき、 $\text{〔ク〕} < \mu < \text{〔ケ〕}$ であることがわかる。



入試問題研究 第182回 慶応大学 理工学部 ① ばねとおもりの運動 解答・解説

(1) 床が滑らかな場合を考える。

(i) 電場 E をかけている場合、つりあいの位置は $x = L$ だから、ばねの力は $f = -kL$ である。電場からの力 $f' = QE$ とつりあうので $-kL + QE = 0$ より $L = \frac{QE}{k} \dots \boxed{\text{(ア)}}$ である。その運動(単振動)の中心は $x = L$ (つりあいの位置)である。単振動の中心を原点とする座標系 x' と

すると、おもりの運動方程式は $ma' = -k(x+x') + QE$ だから $a' = -\frac{k}{m}x'$ となる。単振動の

公式 $a = -\omega^2 x$ より、角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であるから、周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \dots \boxed{\text{(イ)}}$

(ii) 時刻 $t = 0$ でおもりは $x = 0$ に静止していたから、その位置は単振動の端(最大変位位置)である。半周期後の位置は単振動の反対側の端である。中心が $x = L$ であるので、時刻 $t = \frac{T}{2}$ のおもりの位置は $x = 2L$ になる。よって、空欄 $\boxed{\text{(ウ)}}$ の解は 2 である。

次に、 $\frac{T}{2} < t \leq T$ の間電場を切る。このときのおもりのつりあいの位置は中心が $x = 0$ に変わる。

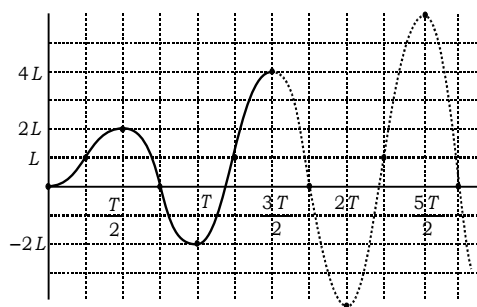
よって、単振動の中心は $x = 0$ になり、 $t = \frac{T}{2}$ のとき、速度ゼロだから、その位置は単振動の端である。振幅(中心と端の間の距離)は $2L$ であるから、空欄 $\boxed{\text{(エ)}}$ の解は 2 である。

続いて $T < t \leq \frac{3T}{2}$ で再び電場 E をかけるから、単振動

の中心は中心が $x = L$ に変わる。また、 $t = T$ のおもりの位置は $x = -2L$ 、速度がゼロだから、単振動の端である。よって、振幅は $3L$ になる。半周期後は単振動の反対

側の端に移動するから、 $t = \frac{3T}{2}$ のとき $x = 4L$ である。

全体の動きを示すと右図になる。



(2) おもりと床との間に摩擦力がはたらく場合を考える。おもりが x の正向きに動くとき、おもりに働く力は $F = QE - kx - \mu' mg \dots \boxed{\text{(カ)}}$ である。摩擦力に逆らってした仕事は $\mu' mgx$ 、ばねのエネルギー

$\frac{1}{2}kx^2$ 、電場からの仕事 QEx より $QEx = \mu' mgx + \frac{1}{2}kx^2$ の関係が成立する。

よって、 $x = \frac{2QE}{k} - \frac{2\mu' mg}{k}$ である。(ア)より $L = \frac{QE}{k}$ だから、 $x = 2 \times L - \frac{2\mu' mg}{k}$ となり、

空欄 $\boxed{\text{(キ)}}$ は $\frac{2\mu' mg}{k}$ である。その位置で静止し続けているから、その位置で、静止摩擦力 f

は最大摩擦力を超えない。よって、次の関係式 $0 = QE - k\left(2L - \frac{2\mu' mg}{k}\right) - f$ 、 $|f| \leq \mu mg$ 、

$\mu' = \frac{\mu}{2}$ より $\mu mg \geq \left|QE - k\left(2L - \frac{\mu mg}{k}\right)\right|$ が成立する。 $L = \frac{QE}{k}$ より $\mu mg \geq |\mu mg - QE|$

だから、 $\mu > \frac{QE}{2mg} \dots \boxed{\text{(ク)}}$ である。また、 $x = 0$ で滑りだすから、電場からの力は最大摩擦を超

えるので $QE > \mu mg$ より、 $\mu < \frac{QE}{mg} \dots \boxed{\text{(ケ)}}$ である。